

Zur Differenzierbarkeit von Extremalflächen bei Variationsproblemen mehrfacher Integrale

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von

Ursula Brechtken-Manderscheid

aus Cottbus

Bochum 1970

1968



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Zur Differenzierbarkeit von Extremalflächen bei Variationsproblemen mehrfacher Integrale

**Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum**

vorgelegt von

Ursula Brechtken-Manderscheid

aus Cottbus

Bochum 1970



Dissertation eingereicht am 4. 9. 1968
Tag der mündlichen Prüfung: 21. 10. 1968
Referent: Prof. Dr. Günter Ewald
Korreferent: Dozent Dr. Hans-Jörg Reiffen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
Bezeichnungen	9
1 Das Variationsproblem	10
1.1 Der Graßmannkegel	10
1.2 Die Grundfunktion F	14
1.3 Verallgemeinerte Ableitungen nach r -Vektoren	20
1.4 Geometrische Deutung der Ableitungen f_I, F_i^∞	21
1.5 Fréchet-Mannigfaltigkeiten	25
1.6 Formulierung des Variationsproblems	27
1.7 Der Existenzsatz	29
2 Konstruktion geeigneter Approximations- polyeder an die Extremale	32
2.1 Simplexpolyeder	32
2.2 Aussagen über das Verhalten der Extremalen im Kleinen	35
2.3 Der Approximationssatz	54
2.4 Folgerungen aus dem Approximationssatz	66
3 Existenz von Tangentialebenen an die redu- zierte Extremale	70
3.1 Formulierung des Hauptsatzes und Beweisskizze	70
3.2 Die erste Variation des Variationsproblems	71
3.3 Die Methode der Spezialisierung	76
3.4 Bestimmung des Maßes der Singularitätenmenge, Bemerkungen zu dem Fall $r < n-1$	85
Literaturverzeichnis	88

Einleitung

C.L. Siegel beweist im Jahre 1957 den Satz [17], daß die Extremalkurven eines n -dimensionalen Variationsproblems in Parameterform mit festen Endpunkten stetig differenzierbar sind und den Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen genügen, falls die folgenden Voraussetzungen über den Integranden $F(x^i, X^i)$ des Variationsintegrals erfüllt sind: F ist positiv für $(X^i) \neq 0$, positiv homogen erster Ordnung und streng konvex bei festem (x^i) und stetig differenzierbar nach x^i, X^i ($i = 1, \dots, n$).

Für $n = 2$ hatten H. Busemann und W. Mayer schon 1941 die stetige Differenzierbarkeit der Extremalkurve nachgewiesen, wobei bis auf die Abschwächung der Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit nach x^i zu einer Lipschitzbedingung hinsichtlich x^i die gleichen Voraussetzungen über $F(x, X)$ gemacht wurden wie bei Siegel.

In der vorliegenden Arbeit werden die Extremalen r -facher Variationsintegrale untersucht. Für $r = n-1$ werden Voraussetzungen an die Grundfunktion F hergeleitet, aus denen die Existenz von Tangentialebenen an die Extremale in fast allen Punkten der Extremale folgen. Für $r < n-1$ lassen sich große Teile der Untersuchung übertragen, es bleibt aber offen, ob die Forderungen, die für $r < n-1$ an die Extremale gestellt werden müssen, um das gleiche Resultat wie für $r = n-1$ zu erhalten, aus den Eigenschaften der Grundfunktion beweisbar sind.

Das Variationsproblem lautet

$$J_F(x^i, T) := \inf \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_T \int_T F(x_m^i, \frac{\partial x_m^i}{\partial t^\alpha}) dt^\alpha = \min,$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, r,$$

wobei das Infimum über Folgen stetig differenzierbarer Funktionen x_m^i zu erstrecken ist, die gleichmäßig gegen x^i konvergieren. Die Funktionen $x^i : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind eine Parameterdarstellung einer orientierten Fréchet-Mannigfaltigkeit vom topologischen Typ der r -dimensionalen Vollkugel. Als Randbedingung wird gefordert, daß die Funktionen $x^i|_{\partial T}$ Parameterdarstellung einer vorgeschriebenen Fréchet-Mannigfaltigkeit Γ vom Typ der $(r-1)$ -dimensionalen Sphäre ist und $x^i|_{\partial T}$ injektiv ist.

Die Grundfunktion $F(x, X_\alpha)$ ist hier (wie bei Siegel) als positiv für $X_1 \wedge \dots \wedge X_r \neq 0$, positiv homogen erster Ordnung in X_α , stetig differenzierbar in allen Variablen und stark konvex vorausgesetzt. Als einzige Einschränkung der als Rand vorgegebenen Fréchet-Mannigfaltigkeit Γ fordern wir, daß es eine orientierte Fréchet-Mannigfaltigkeit vom Typ B^r mit Γ als Rand gibt.

Sei S die Menge der Punkte $P \in T$, für die in $x(P)$ an die Extremale keine Tangentialebene existiert. Wir zeigen, daß

$$J_F(x, S) = 0,$$

was äquivalent damit ist, daß das Lebesguesche r -Areal der Menge $x(S)$ auf der Extremalen 0 ist.

Für das Variationsproblem $J(x,T) = \min$ bei festem Rand ist die Existenz einer Extremalen für $r = 1$, n beliebig und $r = 2$, $n = 3$ gesichert (vgl. A.G. Sigalow [18] , J.M. Danskin [10] , L. Cesari [7]), für die übrigen Wertepaare ist das Existenzproblem noch offen.

Zur Geschichte des in dieser Arbeit behandelten Problems ist zu sagen, daß C.B. Morrey [12] für den Fall $n = 3$ die Frage nach der stetigen Differenzierbarkeit der Extremalen aufwirft. Im Existenzbeweis erreicht man nämlich eine konforme Darstellung $x^i(t^*)$ der Extremalen. Hat man dann stetige Differenzierbarkeit der x^i , so folgt die Analytizität der x^i in jedem Gebiet, in dem die ersten Ableitungen der x^i nicht simultan verschwinden. Morrey beweist die stetige Differenzierbarkeit für ein spezielles Variationsproblem ($n = 3$, $r = 2$), bei dem die Eichfläche $F = 1$ der Variationsfunktion in jedem Punkt x in einer hinreichend dünnen Kugelschale liegt und eine weitere Bedingung erfüllt ist, in der die zweiten Ableitungen der Variationsfunktion auftreten.

Während der Busemann-Mayersche Beweis im wesentlichen geometrischer Natur ist, aber für beliebiges n nicht ausgedehnt werden konnte, benutzt Siegel in stärkerem Maße analytische Methoden. Siegel approximiert die Extremalkurve durch Polygonzüge und das Variationsintegral durch endliche Summen (integralfreie Variationsrechnung). Die Bedingungen, aus denen die stetige Differenzierbarkeit

der Extremalen gefolgert wird, ergeben sich aus der approximativen Herleitung eines geeigneten Beweises (vgl. T. Rado [15], S.52) des Lemmas von Du Bois Reymond.

Wir konstruieren zunächst Folgen von geeigneten Approximationspolyedern an die betrachtete Extremale. Mit Hilfe einer Approximation des Funktional $J_P(x,T)$ stellen wir eine Gleichung für eine Approximation der ersten Variation des Variationsintegrals auf. Schließlich spezialisieren wir die Vergleichspolyeder und erhalten Bedingungen für die Richtungen der Simplexes der Approximationspolyeder mit einem gemeinsamen Eckpunkt. Es handelt sich dabei um einen Schluß vom Typ des Übergangs vom Integral zum Integranden. Daraus erklärt es sich, daß die Aussagen nur 'fast überall' erreicht werden.

Andererseits kann man auch nicht erwarten, daß überall eine Tangentialebene an die Extremale existiert. Es gibt nämlich schon im Bereich der Flächen minimalen Areal Beispiele, daß Punkte auftreten, Verzweigungspunkte der Fläche, in denen alle ersten Ableitungen verschwinden (vgl. Courant [8], S. 123).

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Dr. G. Ewald; zahlreiche Diskussionen mit ihm und im Kreise der Mitglieder seines Institutes haben die Arbeit gefördert.

Bezeichnungen

Die Indizes i, j, k durchlaufen die Zahlen $1, 2, \dots, n$, die Indizes α, β, γ die Zahlen $1, 2, \dots, r < n$, falls nichts anderes ausdrücklich gesagt wird. Punkte des euklidischen Raumes R^n schreiben wir mit kleinen lateinischen Buchstaben, Vektoren des R^n mit großen lateinischen Buchstaben. Für s -Vektoren, $s < n$, verwenden wir große gotische Buchstaben, z.B. $\mathcal{K}, \mathcal{M}$, ihre Komponenten bezüglich der kanonischen Basis bezeichnen wir mit X^I, A^I entsprechend; I ist dabei Abkürzung für ein s -Tupel von Indizes $i_1, \dots, i_s$. Die Einsteinsche Summationskonvention wird angewandt. Für die Komponenten des s -fachen äußeren Produkts der X_α benutzen wir die Schreibweise:

$$X^I = X_1^{i_1} \wedge \dots \wedge X_s^{i_s} = \det(X_1, \dots, X_s)^{i_1 \dots i_s},$$

wobei die an die Determinante angehängten Indizes andeuten sollen, daß aus der $n \times s$ -Matrix $(X_\alpha^{i_1})$, $1 \leq \alpha \leq s$, die Determinante der Zeilen mit den Indizes $i_1, \dots, i_s$ zu nehmen ist.

Vektoren mit der euklidischen Länge 1 in Richtung des Vektors X bzw. $\mathcal{K}$ kennzeichnen wir durch den Index u : $X_u, \mathcal{K}_u$. Das Zeichen $\hat{\alpha}$ in einem Produkt oder einer Reihe von Indizes bedeutet, daß der Faktor oder der Index an der Stelle α auszulassen ist.

Mit B^s bzw. S^s bezeichnen wir die s -dimensionale abgeschlossene Einheitskugel bzw. die s -dimensionale Einheitssphäre in einem euklidischen s -dimensionalen Raum. Die s -dimensionale abgeschlossene Kugel bzw. die s -dimensionale Sphäre mit Mittelpunkt x und Radius r schreiben wir $B^s(x, r)$ bzw. $S^s(x, r)$

1. Das Variationsproblem

1.1 Der Graßmannkegel

$x^i = x^i(t^\alpha)$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, r$ sei eine differenzierbare Vektorfunktion, Parameterdarstellung eines differenzierbaren orientierten Flächenstücks (im Sinne der klassischen Differentialgeometrie). Die Vektoren $X_\alpha := \left(\frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} \right)$, die Tangentialvektoren an die Parameterlinien, spannen den Tangentialraum an die Fläche auf. Wir suchen eine Darstellung des Tangentialraums, die von der willkürlichen Wahl der Parameter unabhängig ist. Eine algebraische Größe, die zugleich die Orientierung des Tangentialraums beschreibt, ist das äußere Produkt $\mathcal{K}$ der Vektoren X_α , $\mathcal{K} = X_1 \wedge \dots \wedge X_r$. Zur Einführung des äußeren Produkts benötigen wir die folgenden Definitionen (vgl. [3]):

Definition: V, W seien reelle Vektorräume. Die Abbildung

$f: V^r \rightarrow W$ heißt multilinear und alternierend, wenn für $c \in \mathbb{R}$, $X_\alpha, Y_\alpha \in V$

$$1. f(X_1, \dots, X_\alpha + Y_\alpha, \dots, X_r) = f(X_1, \dots, X_\alpha, \dots, X_r) + f(X_1, \dots, Y_\alpha, \dots, X_r),$$

$$f(X_1, \dots, cX_\alpha, \dots, X_r) = cf(X_1, \dots, X_\alpha, \dots, X_r) \text{ für alle } \alpha$$

$$2. X_\alpha = X_\beta \text{ mit } \alpha \neq \beta \quad f(X_1, \dots, X_r) = 0 \text{ zur Folge hat.}$$

Zu der Eigenschaft 2. ist folgendes äquivalent:

2'. Ist π eine Permutation von $\{1, 2, \dots, r\}$, dann gilt

$$f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(r)}) = \text{sign}(\pi) f(X_1, \dots, X_r).$$

Definition des r -fachen äußeren Produkts $\bigwedge_r V$ von V :

$\bigwedge_r V$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der bis auf Isomorphie durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert ist

1. es gibt eine multilineare alternierende Abbildung von $\overset{r}{\times} V$ in $\overset{r}{\wedge} V$

$$\wedge : (X_1, \dots, X_r) \rightarrow X_1 \wedge \dots \wedge X_r \in \overset{r}{\wedge} V,$$

sodaß das Bild dieser Abbildung den Vektorraum $\overset{r}{\wedge} V$ erzeugt,

2. Sei W ein beliebiger R -Vektorraum, f eine multilineare, alternierende Abbildung $f: \overset{r}{\times} V \rightarrow W$, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $g: \overset{r}{\wedge} V \rightarrow W$ mit $f(X_1, \dots, X_r) = g(X_1 \wedge \dots \wedge X_r)$.

Die Abbildung $\wedge$, mit der wir $\overset{r}{\wedge} R^n$ darstellen, ist definiert mit Hilfe des Tensorprodukts $\otimes$:

$$X_1 \wedge \dots \wedge X_r = \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) X_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes X_{\pi(r)},$$

wobei π alle Permutationen von $\{1, 2, \dots, r\}$ durchläuft.

Wir stellen einige Eigenschaften des äußeren Produkts von Vektoren zusammen.

1. Sei $\{E_1, \dots, E_n\}$ eine Basis des R^n , so bilden die r -Vektoren $E_{i_1} \wedge E_{i_2} \wedge \dots \wedge E_{i_r}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, eine Basis des Raumes $\overset{r}{\wedge} R^n$. Die Koordinaten von $X_1 \wedge \dots \wedge X_r$ bezüglich dieser Basis sind die Unterdeterminanten aus den Zeilen $i_1, \dots, i_r$ der $n \times r$ -Matrix, die die Komponenten $X_{\alpha}^{i_1}$ von X_{α} bezüglich der Basis $\{E_1, \dots, E_n\}$ als Spalten hat. (Beweis mit Hilfe der Definition über das Tensorprodukt). Wir benutzen folgende Bezeichnung

$$X^I := \det(X_1, \dots, X_r)^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) X_{\pi(1)}^{i_1} \dots X_{\pi(r)}^{i_r},$$

π durchläuft die Permutationen von $\{1, 2, \dots, r\}$,

$$i_1 < i_2 < \dots < i_r.$$

$\overset{r}{\wedge} R^n$ wird durch die euklidische Metrik

$$|\mathcal{K}|^2 = \sum_I (X^I)^2$$

zu einem topologischen Raum.

2. Ein r -Vektor, d.h. ein Element von $\bigwedge^r \mathbb{R}^n$ heißt einfach, wenn er als äußeres Produkt $X_1 \wedge \dots \wedge X_r$ dargestellt werden kann. Mit Hilfe der Komponenten bezüglich der in 1. beschriebenen Basis und der Größen

$$X_{\substack{i_1 \dots i_r \\ (\alpha) \quad (\beta)}} := - X_{\substack{i_1 \dots i_r \\ (\alpha) \quad (\beta)}} = - X_{\substack{i_1 \dots i_r \\ (\alpha) \quad (\beta)}}$$

läßt sich die Einfachheit eines r -Vektors durch die Einfachheitsrelationen charakterisieren:

$$\sum_{\pi} \text{sign}(\pi) X^{\pi(i_1) \dots \pi(i_r)} X^{j_2 \dots j_r} = 0,$$

π durchläuft die Permutationen von $\{1, 2, \dots, r+1\}$, für alle festen $(r+1)$ -Tupel $i_1, \dots, i_{r+1}$ und alle festen $(r-1)$ -Tupel $j_2, \dots, j_r$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_{r+1}$, $j_2 < j_3 < \dots < j_r$.

Für $n = 4$, $r = 2$ lauten die Einfachheitsrelationen

$$X^{12} X^{34} - X^{13} X^{24} + X^{14} X^{23} = 0.$$

Die Menge der einfachen r -Vektoren $\neq 0$ bildet eine algebraische Mannigfaltigkeit, einen Kegel, der Dimension $r(n-r)+1$ im $\binom{n}{r}$ -dimensionalen Raum $\bigwedge^r \mathbb{R}^n$. Die Menge der einfachen r -Vektoren heißt Grassmannkegel G_r^n . Für $G_r^n - \{0\}$ lassen sich lokale Parameter angeben: sei $\mathcal{K}_0 \neq 0$, $\mathcal{K}_0 \in G_r^n$ äußeres Produkt der Vektoren $X_1, \dots, X_r$; diese Vektoren seien zu einer Basis $\{X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ ergänzt. Jeder einfache r -Vektor $\mathcal{K}$, dessen Komponente $X^{12 \dots r}$ bezüglich der gemäß 1. aus den X_i konstruierten Basis von $\bigwedge^r \mathbb{R}^n$ größer als 0 ist, läßt sich als äußeres Produkt folgendermaßen darstellen:

$$\mathcal{H} = (x^{12..r})^{r+1} \wedge \begin{pmatrix} x^{12..r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{r+1 \ 2..r} \\ \vdots \\ x^n \ 2..r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ x^{12..r} \\ \vdots \\ 0 \\ x^{1 \ r+1 \ 3..r} \\ \vdots \\ x^{1 \ n \ 3..r} \end{pmatrix} \wedge \dots \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{12..r} \\ x^{1..r-1 \ r+1} \\ \vdots \\ x^{1..r-1 \ n} \end{pmatrix}$$

Wählt man also

$$u_0 := x^{12..r}, u_1 := \frac{x^{r+1 \ 2..r}}{x^{12..r}}, \dots, u_{r(n-r)} := \frac{x^{12..r-1 \ n}}{x^{12..r}},$$

so hat man eine Parameterdarstellung für die Teilmenge $\{\mathcal{H}; x^{12..r} > 0\} \subset G_r^n$ gefunden. (vgl. [1])

Für $1 < r < n$ ist G_r^n eine echte Teilmenge von $\bigwedge^r \mathbb{R}^n$ und kein linearer Raum. (vgl. [1])

4. Es gibt eine eindeutige Zuordnung der Menge der r -dimensionalen orientierten Ebenen durch 0 in $\mathbb{R}^n$ zu der Menge der Halbgeraden $\{c \mathcal{H}, c > 0\} \subset G_r^n$. Beweis: Wird die Ebene durch die Vektoren $A_1, \dots, A_r$ aufgespannt, wobei die Orientierung der Ebene durch die Anordnung der Vektoren A_α in der angegebenen Reihenfolge berücksichtigt sei, so wird ihr die Halbgerade $\{c \mathcal{A}, \mathcal{A} = A_1 \wedge \dots \wedge A_r, c > 0\}$ zugeordnet. Ist umgekehrt $\{c \mathcal{A}, c > 0\} \subset G_r^n$ vorgegeben, so ist $\mathcal{A}$ einfach, d.h. äußeres Produkt von r Vektoren $A_1, \dots, A_r$. Dann ist die von diesen Vektoren aufgespannte Ebene durch 0 mit der durch die Reihenfolge der A_α in der Produktdarstellung gegebenen Orientierung versehen die der Halbgeraden $\{c \mathcal{A}\}$ zugeordnete Ebene. Die entgegengesetzt

orientierte Ebene ist der Menge $\{c\mathcal{A}, \mathcal{A} = A_1 \wedge \dots \wedge A_r, c < 0\}$ zugeordnet. Weiter ordnen wir einer Lebesgue-meßbaren Punktmenge M in der von $X_1, \dots, X_r$ aufgespannten Ebene des R^n denjenigen r -Vektor aus $\{c\mathcal{H}, \mathcal{H} = X_1 \wedge \dots \wedge X_r, c > 0\}$ zu, dessen Länge gleich dem Lebesgueschen Maß der Punktmenge M ist.

5. Sei $\mathcal{H}$ ein einfacher r -Vektor, $\mathcal{H} = X_1 \wedge \dots \wedge X_r$, und M eine Lebesgue-meßbare Punktmenge, der $\mathcal{H}$ zugeordnet ist (nach 3.). $\{E_1, \dots, E_n\}$ sei eine Basis des R^n . Dann sind die Koeffizienten X^I von $\mathcal{H}$ bezüglich der aus E_i (gemäß 1.) konstruierten Basis betragsmäßig gleich dem Lebesgueschen Maß der Projektion der Punktmenge M in Richtung der Vektoren $E_{i_{r+1}}, \dots, E_{i_n}$ auf die von den Vektoren $E_{i_1}, \dots, E_{i_r}$ aufgespannten Ebene. (i Permutation von $\{1, \dots, n\}$)

1.2 Die Grundfunktion F

Die Grundfunktion F des vorgegebenen Variationsproblems ist erklärt über dem Produkt $G \times \bigwedge^r R^n$, wobei G eine konvexe, kompakte Teilmenge des R^n ist. Wir stellen an F die folgenden Forderungen:

- F.1 $F(x, X_1, X_2, \dots, X_r) > 0$, falls $X_1 \wedge \dots \wedge X_r \neq 0$,
 $F(x, X_1, X_2, \dots, X_r) = 0$, falls $X_1 \wedge \dots \wedge X_r = 0$.
- F.2 $F(x, \lambda_1^\alpha X_\alpha, \dots, \lambda_r^\alpha X_\alpha) = \det(\lambda_\beta^\alpha) F(x, X_1, \dots, X_r)$, falls
 $\det(\lambda_\beta^\alpha) > 0$.

Diese Forderung bedeutet positive Homogenität 1. Ordnung. Wenn F.2 erfüllt ist, ist das Variationsintegral unabhängig von der Wahl der Parameter innerhalb einer Klasse von Parameterdarstellungen, in der die Funktionaldeterminante jedes Parameterwechsels positiv ist.

Beweis: Beim Parameterwechsel von t^α zu u^β transformieren sich die Vektoren nach der Regel

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial u^\beta}{\partial t^\alpha} ,$$

während das Differential $dt^1 \dots dt^r$ durch

$$\frac{\partial(t^1 \dots t^r)}{\partial(u^1 \dots u^r)} du^1 \dots du^r$$

zu ersetzen ist.

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} F(x(t^\alpha), \frac{\partial x^i}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial x^i}{\partial t^r}) dt^1 \dots dt^r = \\ &= \int_u F(x(u^\beta), \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial t^r}) \frac{\partial(t^1 \dots t^r)}{\partial(u^1 \dots u^r)} \cdot du^1 \dots du^r = \\ &= \int_u F(x(u^\beta), \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial x^i}{\partial u^r}) du^1 \dots du^r . \end{aligned}$$

F.3 Die partiellen Ableitungen $F_i := \frac{\partial F}{\partial x^i}$, $F_i^\alpha := \frac{\partial F}{\partial x_\alpha^i}$ von F nach der Ortsvariablen x^i und den Richtungsvariablen x_α^i existieren in allen $x \in \mathcal{G}$, $x_\alpha \in \mathbb{R}^n$ mit $x_1 \wedge \dots \wedge x_r \neq 0$ und sind stetig in allen Argumenten. Die Stetigkeit von F in allen Argumenten folgt daraus.

Folgerung:

Aus der Stetigkeit und der Homogenität von F und der Kompaktheit von G folgt, daß Konstanten $\bar{K}$, $\bar{K}$ existieren, so daß

$$F.4 \quad \bar{K} |X_1 \wedge \dots \wedge X_r| \leq F(x, X_1, \dots, X_r) \leq \bar{K} |X_1 \wedge \dots \wedge X_r| .$$

Aus den Forderungen F.2 und F.3 folgen die Eulerschen Homogenitätsrelationen:

$$(1) \quad F_i^\alpha(x, X_1, \dots, X_r) X_\beta^i = \delta_{\beta}^{\alpha} F(x, X_1, \dots, X_r), \quad (\text{vgl. [2]})$$

Homogenitätseigenschaften von F_i :

$$(2) \quad F_i(x, \lambda_1^\alpha X_\alpha, \dots, \lambda_r^\alpha X_\alpha) = \det(\lambda_\beta^\alpha) F_i(x, X_1, \dots, X_r), \text{ falls } \det(\lambda_\beta^\alpha) > 0 ,$$

Rechenregeln für die F_i^α :

$$\lambda_\beta^\alpha F_i^\beta(x, \lambda_1^\mu X_\mu, \dots, \lambda_r^\mu X_\mu) = \det(\lambda_\nu^\mu) F_i^\alpha(x, X_1, \dots, X_r), \text{ falls } \det(\lambda_\nu^\mu) > 0 .$$

Diese Formel folgt wie im Fall einer Variablen aus der Homogenitätsrelation. Wir werden diese Formel nur in den folgenden Spezialfällen benutzen

$$(3) \quad \begin{aligned} F_i^\alpha(x, X_1, \dots, cX_\beta, \dots, X_r) &= cF_i^\alpha(x, X_1, \dots, X_\beta, \dots, X_r), \alpha \neq \beta \\ F_i^\alpha(x, X_1, \dots, cX_\beta, \dots, X_r) &= F_i^\alpha(x, X_1, \dots, X_\beta, \dots, X_r), \alpha = \beta, c > 0 . \end{aligned}$$

Aus F.2 folgt weiterhin, daß F invariant ist gegenüber linearen Transformationen des Vektorraums der X_α , falls sie die Determinante 1 haben. F hängt also nur von dem äußeren Produkt $\mathcal{H}$ der Vektoren X_α ab. Aus geometrischer Sicht ist es sinnvoll, an Stelle von F die über $G \times G_r^n$ induzierte Funktion

$f(x, \mathcal{K}): = F(x, X_1, \dots, X_r)$, wobei $\mathcal{K} = X_1 \wedge \dots \wedge X_r$, zu betrachten. Die Forderungen F.1, F.2 übertragen sich sofort auf f

$$f.1 \quad f(x, \mathcal{K}) > 0, \text{ falls } \mathcal{K} \neq 0, \quad f(x, 0) = 0,$$

$$f.2 \quad f(x, c\mathcal{K}) = cf(x, \mathcal{K}) \text{ für } c > 0.$$

F.5 Wir fordern starke Konvexität von f bei festem Ort x , das heißt

$$f(x, \mathcal{K}_0) \leq \sum_{v=1}^m f(x, \mathcal{K}_v), \text{ falls } \mathcal{K}_0 = \sum_{v=1}^m \mathcal{K}_v, \mathcal{K}_v \in G_r^n, v = 0, 1, \dots, m,$$

wobei " $=$ " äquivalent zu

$$\mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_m = \lambda_v \mathcal{K}_v \text{ mit } \lambda_v \geq 0 \quad \text{für } v = 1, 2, \dots, m.$$

Bei dieser Definition ist zu beachten, daß G_r^n i.a. keine konvexe Menge ist, so daß diese Konvexität einer auf G_r^n definierten Funktion eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Konvexität ist. Eine geometrische Charakterisierung dieses Konvexitätsbegriffs ist mit Hilfe der Indikatrix $I_f := \{ \mathcal{K}, f(x, \mathcal{K}) = 1, x \text{ fest} \}$ möglich. f ist genau dann stark konvex, wenn I_f auf dem Rand einer streng konvexen Menge liegt. Die einzigen Strecken auf dem Graphen $\{(\mathcal{K}, f(x, \mathcal{K}))\}$ von f sind wegen der Homogenität von f die Halbgeraden $\{(c\mathcal{K}, cf(x, \mathcal{K})), c > 0, \mathcal{K} \neq 0\}$. (vgl. [5])

Aus F.4 folgt

$$f.4 \quad \bar{K} |\mathcal{K}| \leq f(x, \mathcal{K}) \leq \bar{K} |\mathcal{K}|.$$

Satz

$F(x, \mathcal{K})$ sei eine stark konvexe Grundfunktion, $|\mathcal{K}_0| = 1$,

$P(\mathcal{H}_0, \delta)$ bezeichne die Klasse der Polygonzüge*) $P = \{\mathcal{H}_v\}$ mit Vektoren $\mathcal{H}_v \in G_{\mathbb{R}}^n$, sodaß $\sum_{\mathcal{H}_v \in P} |\mathcal{H}_v| - |\mathcal{H}_0| \geq \delta > 0$

Dann ist $\varepsilon(\delta, x, \mathcal{H}_0) := \inf_{P \in \bar{P}(\mathcal{H}_0, \delta)} \sum_{\mathcal{H}_v \in P} F(x, \mathcal{H}_v) - F(x, \mathcal{H}_0) > 0$.

$\varepsilon(\delta, x, \mathcal{H}_0)$ hängt stetig von den Variablen $(x, \mathcal{H}_0)$ ab,

$\varepsilon(\delta, x, \mathcal{H})$ ist monoton als Funktion von δ und $\varepsilon(0, x, \mathcal{H}) = 0$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß es eine Teilklasse

$\bar{P}(\mathcal{H}_0, \delta) \subset P(\mathcal{H}_0, \delta)$ gibt, sodaß für $\delta > 0$

$$\varepsilon(\delta, x, \mathcal{H}_0) = \min_{P \in \bar{P}(\mathcal{H}_0, \delta)} \sum_{\mathcal{H}_v \in P} F(x, \mathcal{H}_v) - F(x, \mathcal{H}_0) > 0.$$

Aus $\sum_{\mathcal{H}_v \in P} |\mathcal{H}_v| - |\mathcal{H}_0| \geq \delta > 0$ folgt für die Komponenten λ_{gv} , $0 \leq g \leq \left(\frac{n}{\mathbb{R}}\right) - 1$, von $\mathcal{H}_v$ bezüglich einer Orthonormalbasis, die $\mathcal{H}_0$ als Element enthält,

$$0 \leq g \leq \left(\frac{n}{\mathbb{R}}\right) - 1 \quad \left\{ \sum_v |\lambda_{gv}|, \sum_v |\lambda_{0v}| - 1 \right\} = \lambda > 0.$$

Zu jedem Polygon $P = \{\mathcal{H}_v\}$ gibt es also einen Polygonzug $\tilde{P} = \{\mathcal{H}_{\tilde{v}}\}$ mit denselben Vektoren (in eventuell neuer Reihenfolge) und der Eigenschaft, daß ein Eckpunkt Q des Polygonzuges $\tilde{P}$ den Abstand $\frac{\lambda}{2}$ von den Punkten des Polygonzuges $\{\mathcal{H}_0\}$ hat. Diesem Polygon $\tilde{P}$ ordnen wir nun den Polygonzug $\tilde{\tilde{P}} = \{Q - \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0 - Q\}$ zu. Wegen der starken Konvexität von $F(x, \mathcal{H})$ ist $F(x, Q) + F(x, \mathcal{H}_0 - Q) \leq \sum_{\mathcal{H}_v \in P} F(x, \mathcal{H}_v)$.

Es genügt also zur Berechnung von $\varepsilon(\delta, x, \mathcal{H}_0)$ das Infimum über die Klasse $\bar{P}(\mathcal{H}_0, \delta)$ der Polygonzüge aus 2 Strecken

*) d.h. Streckenzüge im $\bigwedge^{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt 0 und Strecken mit Richtung $\mathcal{H}_v$ und Länge $|\mathcal{H}_v|$ in der durch die Indizes angegebenen Aufeinanderfolge.

mit $\sum_{v=1}^4 |\mathcal{K}_v| - |\mathcal{K}_0| \geq \delta$ zu erstrecken. Jeder Polygonzug P aus $\bar{P}(\mathcal{K}_0, \delta)$ ist durch den von O , $\mathcal{K}_0$ verschiedenen Eckpunkt Q_P eindeutig festgelegt. Die Funktion $\phi(Q_P) = F(x, Q_P) + F(x, \mathcal{K}_0 - Q_P)$ ist stetig in Q_P wegen der Stetigkeit von $F(x, \mathcal{K})$.

Die Bedingung, daß eine Komponente λ_p von Q gleich $\frac{\lambda}{2}$ ist, bedeutet, daß Q in der Menge $\{Q, \max_p \lambda_p \geq \frac{\lambda}{2}\}$ variiert. Aus der positiven Homogenität von F folgt, daß zur Bestimmung von $\varepsilon(\delta, x, \mathcal{K}_0)$ Q nur in einer beschränkten, abgeschlossenen Menge variieren muß. $\phi(Q_P)$ nimmt daher in dieser Menge das Minimum in Q_δ an, der Wert $\phi(Q_\delta)$ ist aber wegen der starken Konvexität größer als 1.

Um zu zeigen, daß $\varepsilon(\delta, x, \mathcal{K}_0)$ als Funktion von $(x, \mathcal{K}_0)$ stetig ist, betrachten wir eine gegen $x_0, \mathcal{K}_0$ konvergierende Folge $(x_v, \mathcal{K}_v)$.

Sei $\varepsilon(\delta, x_v, \mathcal{K}_v) = F(x_v, Q_v) + F(x_v, \mathcal{K}_v - Q_v) - F(x_v, \mathcal{K}_v)$.

Dann betrachten wir die Polygonzüge $\{Q_v, \mathcal{K}_v - Q_v, \mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_v\} \in P(\mathcal{K}_0, \delta)$. Es gilt: $F(x_v, Q_v) = F(x_0, Q_v) + F_1(r, Q_v)(x_v^1 - x_0^1)$, wobei $r = x_0 + \vartheta(x_v - x_0)$, $0 \leq \vartheta \leq 1$.

$$\begin{aligned} \varepsilon(\delta, x_0, \mathcal{K}_0) &\leq F(x_0, Q_v) + F(x_0, \mathcal{K}_v - Q_v) + F(x_0, \mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_v) \\ &= \varepsilon(\delta, x_v, \mathcal{K}_v) + F(x_0, \mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_v) - F_1(r, Q_v)(x_v^1 - x_0^1) \\ &\quad - F_1(\bar{r}, \mathcal{K}_v - Q_v) \cdot (x_v^1 - x_0^1). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit und positiven Homogenität von F und der Ungleichung (F.4) folgt:

$$|F(x_0, \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_v) - F_1(r, Q_v)(x_v^1 - x_0^1) - F_1(\bar{r}, \mathcal{H}_v - Q_v)(x_v^1 - x_0^1)| \\ \leq c_1 |\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_v| + c_2 |x_v - x_0|.$$

Entsprechend folgt:

$$\varepsilon(\delta, x_v, \mathcal{H}_v) \leq \varepsilon(\delta, x_0, \mathcal{H}_0) + \bar{c}_1 |\mathcal{H}_v - \mathcal{H}_0| + \bar{c}_2 |x_v - x_0|.$$

Da $G \times B(\frac{r}{2})$ kompakt ist, $B(\frac{r}{2})$ die Einheitskugel in $\bigwedge^r \mathbb{R}^n$, gilt

$$\varepsilon(\delta) = \min_{\substack{x_v \in G \\ \mathcal{H}_v \in B(\frac{r}{2})}} \varepsilon(\delta, x_v, \mathcal{H}_v) > 0, \text{ falls } \delta > 0.$$

1.3 Verallgemeinerte Ableitungen nach r-Vektoren

In den folgenden beiden Abschnitten wird die Ortsvariable x festgehalten und deshalb im Argument nicht mehr aufgeführt.

Da die Komponenten X^I von $\mathcal{H}$ i.a. algebraisch abhängig sind, kann man nicht in der üblichen Weise Ableitungen nach den Argumenten X^I bilden, trotzdem lassen sich Größen definieren (vgl. [2]), die die wichtigsten Eigenschaften der Ableitungen besitzen:

$$f_I(\mathcal{H}) := \frac{1}{r!} \det(F_1^1, \dots, F_1^r)_{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{r!} F_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge F_{i_r}^r.$$

Dabei sind bei F , F_1^r als Argumente $X_1, \dots, X_r$ einzutragen mit $\mathcal{H} = X_1 \wedge \dots \wedge X_r$. Für diese verallgemeinerten Ableitungen nach r -Vektoren gilt

1. Für $r = 1$, $r = n-1$ stimmen diese Größen f_I mit den partiellen Ableitungen überein,

2. $f_I(c \mathcal{H}) = f_I(\mathcal{H})$ für $c > 0$ und es gilt $f_I(\mathcal{H}) X^I = f(\mathcal{H})$,

3. es gilt die Kettenregel

$$\frac{df(\mathcal{H}(u))}{du} = f_I(\mathcal{H}(u)) \frac{dX^I}{du}.$$

Für 1. und 2. findet man Beweise in [2], der Beweis zu 3. folgt.

Beweis:

$$\begin{aligned} f_I \frac{dX^I}{du} &= \sum_{i_1 \dots i_r} f_I \sum_{\alpha=1}^r \det(X_1, \dots, \frac{dX_\alpha}{du}, \dots, X_r)^{i_1 \dots i_r} \\ &= \frac{1}{F^{r-1}} \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_{\tau} \text{sign}(\tau) F_{i_1}^{\tau(1)} \dots F_{i_r}^{\tau(r)} \sum_{\alpha=1}^r \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) X_{\sigma(1)}^{i_1} \dots \\ &\quad \dots \frac{dX_{\sigma(\alpha)}^{i_\alpha}}{du} \dots X_{\sigma(r)}^{i_r}, \end{aligned}$$

dabei durchlaufen τ und σ die Permutation von $\{1, 2, \dots, r\}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{F^{r-1}} \frac{1}{r!} \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_{\alpha=1}^r \sum_{\sigma, \tau} \text{sign}(\sigma \circ \tau) F_{i_1}^{\tau(1)} X_{\sigma(1)}^{i_1} \dots F_{i_\alpha}^{\tau(\alpha)} \frac{dX_{\sigma(\alpha)}^{i_\alpha}}{du} \\ &\quad \dots F_{i_r}^{\tau(r)} X_{\sigma(r)}^{i_r} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma, \tau} \sum_{\alpha=1}^r \text{sign}(\tau \circ \sigma) \delta_{\sigma}^{\tau} \{1\} \dots F_{i_\alpha}^{\tau(\alpha)} \frac{dX_{\sigma(\alpha)}^{i_\alpha}}{du} \delta_{\sigma}^{\tau} \{\alpha+1\} \dots \delta_{\sigma}^{\tau} \{r\} \\ &= F_i^{\alpha} \frac{dX_\alpha^i}{du} = \frac{dF}{du} = \frac{df}{du}. \end{aligned}$$

1.4 Geometrische Deutung der Ableitungen f_I, F_i^α

Wir betrachten die Menge $I_f \subset G_R^n$. Da F differenzierbar ist, hat I_f in jedem Punkt einen $(n-r)$ -dimensionalen Tangentialraum.

Beweis:

Die Gleichung für I_f lautet in lokalen Parametern:

$$f(\mathcal{K}) = u_0^T F \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-r} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ u_{(n-r)(r-1)+1} \\ \vdots \\ u_{r(n-r)} \end{pmatrix} \right) = 1$$

oder

$$u_0 = U(u_1, \dots, u_{(n-r)r}) .$$

Der Tangentialraum an I_f wird aufgespannt von

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_g} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_0} \frac{\partial u_0}{\partial u_g} \quad g = 1, \dots, r(n-r).$$

Um zu zeigen, daß diese Vektoren linear unabhängig sind, weisen wir die lineare Unabhängigkeit von $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_0}$, $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_g}$ nach: nur bei $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_0}$ ist die Komponente mit dem Index $1, \dots, r$ von 0 verschieden, während die Komponente mit dem Index $1 \dots \alpha r + \beta$ $\alpha + 2 \dots r$ bei dem Vektor $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_g}$ genau dann von 0 verschieden ist, wenn $g = \alpha(n-r) + \beta$.

Weiter gilt:

$$\frac{df(\mathcal{K}(u_g))}{du_\sigma} = f_I(\mathcal{K}(u_g)) \frac{dx^I}{du^\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, r(n-r).$$

Andererseits ist $f_I(\mathcal{K}) \cdot x^I = f(\mathcal{K}) = 1$.

Die Hyperebene in $\wedge R^n$, die durch die Gleichung $f_I(\mathcal{K})A^I = 1$ bestimmt ist, umfaßt den $r(n-r)$ -dimensionalen Tangentialraum an die Indikatrix I_f im Punkt $\mathcal{K}$, da sie wegen der letzten Gleichung den Berührungspunkt enthält, wegen der vorigen parallel zu dem Tangentialraum ist. Wir merken an, daß unter zusätzlichen Konvexitätsbedingungen (lokal strenge

Totalkonvexität, (vgl. [5]) f_I durch diese Eigenschaft unter allen Hyperebenen mit einfachem Normalenvektor lokal eindeutig bestimmt.

Zur Interpretation von F_1^α deuten wir f_I als die r -dimensionale Ebene in dem zu R^n dualen Raum R^{*n} , die von den Vektoren $(F_1^1), \dots, (F_1^r)$ aufgespannt wird. Die einzelnen Vektoren (F_1^α) hängen in einer Weise von ihren Argumenten ab, die man aus der folgenden Konstruktion entnimmt. Wir betrachten die Teilmenge U der einfachen r -Vektoren $\mathcal{H}$, die eine Darstellung $\mathcal{H} = X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_r$ haben mit festen Vektoren $X_2, \dots, X_r$, X_1 orthogonal zu $X_2, \dots, X_r$. Diese Teilmenge ist ein linearer Unterraum, denn mit $\mathcal{H} = X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_r$ und $\mathcal{H}' = Y_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_r$ sind $\mathcal{H} + \mathcal{H}' = (X_1 + Y_1) \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_r$ und $a\mathcal{H} = a X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_r$ Elemente der betrachteten Teilmenge. Der Vektorraum $U \subset G_r^n$ ist $(n-r+1)$ -dimensional, denn die äußeren Produkte von linear unabhängigen Vektoren des orthogonalen Komplements von $X_2, \dots, X_r$ in R^n mit $X_2 \wedge \dots \wedge X_r$ bilden eine Basis. In U betrachten wir die Indikatrix $I_{\bar{f}}$ der Einschränkung $\bar{f}$ von f auf U . $I_{\bar{f}}$ ist nach lokalen Parametern u_g , $g = 1, \dots, n-r$, differenzierbar.

Die Gleichung der Tangentialtypenebene in U ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}(\mathcal{H}(u_g))}{\partial u_g} &= \sum_{i_1, \dots, i_r} f_{i_1 \dots i_r}(\mathcal{H}) \frac{\partial X^{i_1 \dots i_r}}{\partial u_g} \\ &= \sum_{i_2, \dots, i_r} f_{i_1 \dots i_r}(\mathcal{H}) \cdot \frac{\partial X^{i_1}}{\partial u_g} \wedge X^{i_2} \wedge \dots \wedge X^{i_r} = \\ &= \sum_{i_2, \dots, i_r} \frac{1}{F^{r-1}} F_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge F_{i_r}^r \cdot \frac{\partial X^{i_1}}{\partial u_g} \wedge X^{i_2} \wedge \dots \wedge X^{i_r} \\ &= F_1^1(X_1, X_2, \dots, X_r) \frac{\partial X_1^1}{\partial u_g} = 0 \end{aligned}$$

zu $F_1^1(X_1, X_2, \dots, X_r) \cdot A_1^1 = 0$, wobei (A_1^1) der erste Faktor des Vektors $A = A_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_r$ der Tangentialhyperebene an U ist.

Die Konvexitätsforderung F.5 ist hinreichend für die strenge Konvexität von $I_{\overline{F}}$, da $U \subset G_r^n$ eine konvexe Menge ist. Falls $r \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, sind diese Teilmengen U die größten konvexen Teilmengen von G_r^n .

Satz: F_i^α läßt sich darstellen als

$$F_i^\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots \hat{\alpha} \dots i_r} (-1)^{r-\alpha} \cdot \det(X_1, \dots, \hat{\alpha} \dots, X_r)^{i_1 \dots \hat{\alpha} \dots i_r}.$$

Dabei ist der $(r-1)$ -Vektor $\frac{1}{(r-1)!} (-1)^{r-\alpha} X_1 \wedge \dots \wedge \hat{\alpha} \dots \wedge X_r$ gemäß 1.1, 4. der Seite mit den Eckpunkten $0, X_1, \dots, X_{\alpha-1}, X_{\alpha+1}, \dots, X_r$ des Simplexes mit den Eckpunkten $0, X_1, \dots, X_r$ zugeordnet. Die Orientierung der $(r-1)$ -dimensionalen Seite ist dabei so gewählt, daß in dem von $X_1, \dots, X_r$ aufgespannten Raum die Normale der Seite in das Simplex weist.

(Das Zeichen $\hat{\alpha}$ bedeutet, daß der Index oder der Faktor an der Stelle α auszulassen ist.)

Beweis:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots \hat{\alpha} \dots i_r} (-1)^{r-\alpha} \det(X_1 \dots \hat{\alpha} \dots X_r)^{i_1 \dots \hat{\alpha} \dots i_r} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_r} \det(X_1 \dots \hat{\alpha} \dots X_r)^{i_1 \dots \hat{\alpha} \dots i_r} \end{aligned}$$

(α)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{F^{r-1}} \cdot \sum_{i_1, \dots, i_r} \det(F^1, \dots, F^r)_{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1}} \cdot \\
 &\quad \cdot \det(X_1, \dots, \hat{\alpha} \dots, X_r)_{i_1 \dots \hat{\alpha} \dots i_r} \\
 &= \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{F^{r-1}} \sum_{\sigma, \tau} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) F_{i_1}^{\sigma(1)} \dots F_{i_{\alpha}}^{\sigma(\alpha)} F_{i_r}^{\sigma(r)} \cdot \\
 &\quad \cdot X_{\tau(1)}^{i_1} \dots \hat{\alpha} \dots X_{\tau(r)}^{i_r},
 \end{aligned}$$

dabei durchlaufen σ bzw. τ die Permutationen von $\{1, \dots, r\}$ bzw. $\{1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, r\}$,

$$= \frac{1}{(r-1)!} \sum_{\sigma, \tau} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) \delta_{\tau(1)}^{\sigma(1)} \dots \hat{\alpha} \dots \delta_{\tau(r)}^{\sigma(r)} F_i^{\sigma(\alpha)} = F_i^{\alpha},$$

denn für die von 0 verschiedenen Summanden gilt

$\sigma|_{\{1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, r\}} = \tau$, also auch $\sigma(\alpha) = \alpha$. Die Anzahl dieser Permutationen ist $(r-1)!$.

Die Aussage über die Orientierung der Ebene, die

$\{c \cdot (-1)^{r-\alpha} X_1 \wedge \dots \wedge X_{\alpha-1} \wedge X_{\alpha+1} \wedge \dots \wedge X_r, c > 0\}$ zugeordnet ist, folgt aus

$$(-1)^{r-\alpha} X_1 \wedge \dots \hat{\alpha} \dots \wedge X_r \wedge X_{\alpha} = X_1 \wedge \dots \wedge X_r.$$

1.5. Fréchet-Mannigfaltigkeiten

Bevor wir das Variationsproblem formulieren, müssen wir den Definitionsbereich des Variationsintegrals, also den Raum der "Flächen", in dem das Variationsfunktional operiert, definieren.

Die kompakte Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^T$ sei eine endliche Vereinigung von disjunkten $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeiten $T_\nu \subset \mathbb{R}^T$ mit oder ohne Rand.

$\mathcal{T}$ sei die Klasse der zu T diffeomorphen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^T$.

Definition: z_1, z_2 seien stetige Vektorfunktionen mit Definitionsbereichen $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$. Dann heißt

$$D(z_1, z_2) := \inf_{\tau} \max_{t \in T_1} |(z_1 - z_2 \circ \tau)(t)| ,$$

wobei τ alle Diffeomorphismen $T_1 \rightarrow T_2$ mit positiver Funktionaldeterminante durchläuft, die orientierte Fréchet-Distanz von z_1 und z_2 .

Man überlegt sich leicht, daß $D(z_1, z_2) = 0$ eine Äquivalenzrelation in der Menge der stetigen Vektorfunktionen mit Definitionsbereichen aus $\mathcal{T}$ ist.

Definition: Die Äquivalenzklassen $[z, T]$ von stetigen Vektorfunktionen z mit Definitionsbereichen $T \in \mathcal{T}$ heißen orientierte Fréchet-Mannigfaltigkeiten Z vom Typ $\mathcal{T}$.

Die Elemente z einer Klasse $Z = [z, T]$ nennen wir Parameterdarstellungen der Fréchet-Mannigfaltigkeiten Z . Wenn der Definitionsbereich der Parameterdarstellung z aus dem Zusammenhang klar ersichtlich ist, schreiben wir auch kurz $[z, T] = [z]$.

Die Fréchet-Distanz $D(z_1, z_2)$ induziert im Raum der Fréchet-Mannigfaltigkeiten vom Typ $\mathcal{T}$ eine Metrik

$$D(S_1, S_2) := D(z_1, z_2) ,$$

S_1, S_2 Fréchet-Mannigfaltigkeiten mit den Parameterdarstellungen z_1, z_2 .

1.6 Formulierung des Variationsproblems

$z^i : T \subset \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{T}$ ein Gebiet des $\mathbb{R}^r$, sei eine stetig differenzierbare Vektorfunktion. Wir betrachten das Lebesguesche Integral

$$I_F(z, T) = \int_T F(z^i, \frac{\partial z^i}{\partial t^a}) dt^1 \dots dt^r,$$

wobei F eine Grundfunktion mit den Eigenschaften F.1 bis F.5 ist. Aus der Eigenschaft F.2 folgt, daß

$$I_F(z, T) = I_F(y, T'),$$

falls $y = z \circ \tau$, τ ein Diffeomorphismus von T' auf T mit positiver Funktionaldeterminante ist.

Wir setzen das Funktional I_F fort auf dem Raum der stetigen Vektorfunktionen $z : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{T}$ zu

$$J_F(z, T) := \inf_{m \rightarrow \infty} \liminf I_F(x_m, T),$$

wobei das Infimum über alle Folgen (x_m) von stetig differenzierbaren Vektorfunktionen $x_m : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu nehmen ist, die gleichmäßig gegen z konvergieren.

Satz: J_F ist konstant auf den Parameterdarstellungen einer Fréchet-Mannigfaltigkeit S .

Beweis: Seien z_1, z_2 Parameterdarstellungen von S mit den Definitionsbereichen $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$. Dann gibt es eine Folge (τ_m) von Diffeomorphismen $\tau_m : T_1 \rightarrow T_2$ mit positiver Funktionaldeterminante, so daß

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in T_1} |(z_1 - z_2 \circ \tau_m)(t)| = 0.$$

Nach Definition von $J_F(z_1, T_1)$ und $J_F(z_2, T_2)$ gibt es Folgen von stetig differenzierbaren Vektorfunktionen $x_m: T_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y_m: T_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, die gleichmäßig gegen z_1 bzw. z_2 konvergieren, so daß

$$J_F(z_1, T_1) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_F(x_m, T_1),$$

$$J_F(z_2, T_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_F(y_m, T_2).$$

Da die stetig differenzierbaren Vektorfunktionen

$y_m \circ \tau_m: T_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_m \circ \tau_m^{-1}: T_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen z_1 bzw. z_2 konvergieren, folgt:

$$J_F(z_1, T_1) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_F(x_m, T_1) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_F(x_m \circ \tau_m^{-1}, T_2) \geq J_F(z_2, T_2)$$

$$J_F(z_2, T_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_F(y_m, T_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_F(y_m \circ \tau_m, T_1) \geq J_F(z_1, T_1).$$

Es ist also sinnvoll, vom Variationsintegral J_F einer Fréchet-Mannigfaltigkeit S zu sprechen. Wir benutzen das Symbol: $J_F(S) = J_F(z, T)$, $z \in S$, und nennen $J_F(S)$ auch, um eine geometrische Sprechweise zu gebrauchen, das (verallgemeinerte) r -Areal der Fréchet-Mannigfaltigkeit S .

Definition: Wir nennen eine Fréchet-Mannigfaltigkeit E Extremale des Variationsproblems, wenn E bezüglich einer Klasse von Vergleichs-Fréchet-Mannigfaltigkeiten minimales r -Areal hat.

Im folgenden bezeichnet $x: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung von S mit dem Definitionsbereich T .

Definition: Die Menge der Vergleichsflächen S , in der das Variationsfunktional variiert, ist definiert durch die folgenden Eigenschaften:

1. Die Vergleichsflächen S sind orientierte Fréchet-Mannigfaltigkeiten vom Typ B der Einheitskugel B^r .
2. Die Bildmenge $x(T)$ der Vergleichsfläche S liegt in einer (festen) offenen Teilmenge $G' \subset G$ des Definitionsbereiches G der Grundfunktion F .
3. Der Rand $[x|_{\partial T}, \theta T]$ der Fréchet-Mannigfaltigkeit S ist eine vorgeschriebene orientierte Fréchet-Mannigfaltigkeit Γ vom Typ S der $(r-1)$ -Sphäre S^{r-1} , deren Bildmenge homöomorph zu S^{r-1} ist. $x|_{\partial T}$ ist injektiv.

Falls $r = 2$, ist also als Rand eine orientierte, geschlossene Jordan-Kurve Γ vorgeschrieben.

Die Eigenschaft der Extremalität überträgt sich auf Teilflächen: Sei $x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung der Extremalen E , $T \subset T$ ein zulässiger Definitionsbereich für eine Fréchet-Mannigfaltigkeit. Dann ist $J_F(x, T') \leq J_F(z, T'')$ für alle Fréchet-Mannigfaltigkeiten $[z]$ vom gleichen Typ wie T' , die die Randbedingung erfüllen, daß die Fréchet-Mannigfaltigkeiten $[z|_{\partial T''}]$ und $[x|_{\partial T'}]$ übereinstimmen.

1.7 Der Existenzsatz

Das Problem, die Existenz von Extremalen für das oben definierte Variationsproblem zu beweisen, hat sich als

schwierig erwiesen. Bisher wurden Lösungen für ein Variationsproblem, dessen Grundfunktion F vom Ort abhängt, von Sigalov [18] (1951), Danskin [10] und Cesari [7] (1952) angegeben. Morrey gab später eine Vereinfachung [12] der Beweise an. Der Existenzsatz behandelt den Fall $r = 2$, $n = 3$, d.h. der Extremalflächen im R^3 .

$\mathcal{H}$ kann jetzt als Vektorprodukt $[X_1, X_2]$ geschrieben werden. Die Konvexitätsforderung F.5 bedeutet für $n = 3$ starke Konvexität von f als Funktion von $[X_1, X_2]$. Bevor wir den Satz zitieren können, müssen wir noch einige Definitionen bereitstellen.

Definition: Eine Vektorfunktion $x: [u_0, u_1] \rightarrow R^n$ heißt absolut stetig im Parameterintervall $[u_0, u_1]$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für disjunkte Intervalle $(u_j', u_j'') \subset [u_0, u_1]$

$$\sum_j |x(u_j'') - x(u_j')| \leq \varepsilon, \text{ falls } \sum_j u_j'' - u_j' \leq \delta$$

Definition: $x: \bar{T} \rightarrow R^n$, $\bar{T}$ ein abgeschlossener Bereich des R^2 heißt von der Klasse $\bar{H}_2^1(\bar{T})$, wenn x stetig in $\bar{T}$ und absolut stetig in t^α , $\alpha = 1, 2$ für fast alle Werte des anderen Parameters $t^{\alpha'}$, $\alpha' \neq \alpha$, ist; außerdem müssen die Ableitungen der Bogenlänge der Kurven $t^\alpha = \text{const}$ nach dem Parameter $t^{\alpha'}$, die Größen $|\frac{\partial x}{\partial t^{\alpha'}}|$, aus $L_2(T)$ sein, d.h. $|\frac{\partial x}{\partial t^{\alpha}}|$ meßbar und $|\frac{\partial x}{\partial t^{\alpha}}|^2$ Lebesgue-integrierbar.¹⁾

1) Aus den Voraussetzungen über Absolutstetigkeit von x folgt, daß die partiellen Ableitungen fast überall existieren (vgl. [13]).

Definition: Eine Vektorfunktion $x:T \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt verallgemeinert konform, wenn fast überall

$$\left| \frac{\partial x}{\partial t^1} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial t^2} \right|, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t^1}, \frac{\partial x}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Sei Γ eine orientierte geschlossene Jordan-Kurve; wir setzen

$$d\Gamma := \inf \liminf_{m \rightarrow \infty} J_F(x_m, T)$$

für alle Folgen (x_m) , die gleichmäßig gegen eine Darstellung von Γ auf ∂T konvergieren.

Satz: (in der Fassung von Morrey, [12], S. 396)

Sei Γ eine geschlossene orientierte Jordan-Kurve mit $d\Gamma < \infty$, dann gibt es eine stetige Vektorfunktion $x \in \tilde{H}_2^1(\mathbb{B}^2)$, Parameterdarstellung einer orientierten Fréchet-Fläche, so daß

$$J_F(x, B) = d\Gamma.$$

Die Darstellung x der Extremalen $[x]$ ist verallgemeinert konform.

2. Konstruktion geeigneter Approximationspolyeder an die Extremale

2.1. Simplexpolyeder

E sei eine Extremale des Variationsproblems und $J_F(E) < \infty$.

Aus der Definition von $J_F(E)$ folgt die Existenz einer Folge von Fréchet-Mannigfaltigkeiten S_m , die stetig differenzierbare Parameterdarstellungen $x_m: T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T \in B$ mit den folgenden Approximationseigenschaften besitzen:

A.1 die Funktionen x_m konvergieren gleichmäßig gegen eine Parameterdarstellung $x: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ von E

A.2 $\lim_{m \rightarrow \infty} I_F(x_m, T) = J_F(x, T)$.

Das Lebesguesche r-Areal $J_L(x, T)$ einer Fréchet-Fläche S mit der Parameterdarstellung $x: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ erhält man, indem man in $J_F(x, T)$ als Grundfunktion

$$F = L(X_1, \dots, X_r) := |X_1 \wedge \dots \wedge X_r|$$

einsetzt. Wegen F.4 sind die Lebesgueschen r-Areale

$J_L(x_m, T)$ von S_m beschränkt und es gibt eine Teilfolge S_{m_i} , so daß $\lim_{i \rightarrow \infty} J_L(x_{m_i}, T)$ existiert. Da wir im folgenden nur diese Teilfolge benutzen, bezeichnen wir sie mit S_m .

Das Ziel dieses Abschnittes 2 ist die Bestimmung einer Folge von Polyedern, deren Parameterdarstellungen die Approximationseigenschaften A_1 und A_2 haben. Für den Fall $r = n - 1$ können wir zeigen, daß unter den in die Fréchet-Mannigfaltigkeiten S_m einbeschriebenen Polyedern geeignete Folgen ausgewählt werden können.

Obwohl bei der Definition der Fréchet-Mannigfaltigkeit nur C^1 -Mannigfaltigkeiten mit bzw. ohne Rand als Definitionsbereiche zugelassen waren, werden wir im Zusammenhang mit stückweise linearen Parameterdarstellungen auch von Polyedern von R^r als Parameterbereichen sprechen. Dabei ist gemeint, daß an Stelle des Polyeders ein zulässiger Parameterbereich zu setzen ist, der das Polyeder (punktweise) hinreichend gut approximiert.

Definition: Unter einem Netz N von T verstehen wir eine endliche Menge von Simplizes $\Delta \subset T$ mit der Eigenschaft, daß

1. die Vereinigung der Simplizes des Netzes N T überdeckt,
2. der Durchschnitt zweier Simplizes von N leer oder eine gemeinsame s -dimensionale Kante der Simplizes ist,

$s \leq r-1$.

Eine stetige Abbildung $p : T \rightarrow R^n$ heiße Simplexpolyeder, wenn es ein Netz N von T , $N = \{ \Delta_i, i \in I \}$ gibt, so daß $p|_{\Delta_i}$ linear ist für alle $i \in I$. Eine Fréchet-Mannigfaltigkeit, die ein Simplexpolyeder als Parameterdarstellung hat, nennen wir S -Polyeder. Ein Simplexpolyeder ist durch sein Netz und die Bilder der Eckpunkte des Netzes eindeutig bestimmt.

Sei P ein Eckpunkt des Netzes N , dann heiße die Menge der Simplizes, deren Eckpunkt P ist, der Stern $st_T(P)$ von P . Für das Bild von $st_T(P)$ unter einem Simplexpolyeder benutzen wir die Bezeichnung $st(P)$. P heißt Mittelpunkt von $st_T(P)$.

Wir geben eine Approximation des Variationsintegrals $J_F(p, T)$ eines Simplex-Polyeders an. Da $J_F(p, T)$ bzgl. T ein additives Funktional ist, genügt die Approximation

für ein Simplex Δ des Netzes.

Satz: p sei eine lineare Abbildung des Simplexes Δ mit den Eckpunkten $P_0, P_\alpha \in T$, $\alpha = 1, \dots, r$ auf das Simplex mit den Eckpunkten $x_0, x_\alpha \in \mathbb{R}^n$, $p(P_0) = x_0$, $p(P_\alpha) = x_\alpha$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} F(p(t^\alpha), \frac{\partial p}{\partial t^\alpha}) dt^\alpha - \frac{1}{r!} F(x_0, x_\alpha - x_0) = \\ = \theta \cdot C \cdot \max_{x \in p(\Delta)} |x - x_0| \cdot |(x_1 - x_0) \wedge \dots \wedge (x_r - x_0)|, \end{aligned}$$

wobei $|\theta| \leq 1$ und C eine von Δ unabhängige Konstante ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} D &:= \left| \int_{\Delta} F(p(t^\alpha), \frac{\partial p}{\partial t^\alpha}) dt^\alpha - \frac{1}{r!} F(x_0, x_\alpha - x_0) \right| = \\ &= \left| \int_{\Delta} \left[F(p(t^\alpha), \frac{\partial p}{\partial t^\alpha}) - F(x_0, \frac{\partial p}{\partial t^\alpha}) \right] dt^\alpha \right| = \\ &= \left| \int_{\Delta} F_i(x_0 + \mathcal{V}(p(t^\alpha) - x_0), \frac{\partial p}{\partial t^\alpha}) (p^i(t^\alpha) - x_0^i) dt^\alpha \right| \quad 0 \leq \mathcal{V} \leq 1 \end{aligned}$$

Da $G \times B(\mathbb{R})$ kompakt ist, und die n homogenen Funktionen F_i stetig sind, existiert $C := \max_{i=1, \dots, n} \max_{\substack{x \in G \\ x_1 \wedge \dots \wedge x_r \in B(\mathbb{R})}} F_i(x, x_\alpha)$

und es gilt

$$D \leq C \max_{x \in p(\Delta)} |x - x_0| \cdot |(x_1 - x_0) \wedge \dots \wedge (x_r - x_0)|.$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Für das S-Polyeder $[p]$ gilt also

$$\begin{aligned} J_F(p, T) &= \sum_{\Delta \in N} I_F(p|_{\Delta}, \Delta) = \frac{1}{r!} \sum_{\Delta \in N} F(x_{0_\Delta}, x_{\alpha_\Delta} - x_{0_\Delta}) + \\ &+ \theta D_p \cdot C \cdot J_L(p, T), \quad |\theta| \leq 1, \end{aligned}$$

dabei ist x_{o_Δ} ein beliebiger Eckpunkt von $p(\Delta)$ und die übrigen Eckpunkte x_{α_Δ} von $p(\Delta)$ sind so numeriert, daß die Orientierung des Simplexes $p(\Delta)$ richtig wiedergegeben wird; D_p bezeichnet die maximale Kantenlänge des S-Polyeders $[p]$:

$$D_p = \max_{\Delta \in N} \max_{x, y \in p(\Delta)} |x - y| .$$

Für das folgende ist eine in den Eckpunkten des Netzes N symmetrische Darstellung der Approximation von $J_F(p, T)$ günstiger:

$$(4) \quad J_F(p, T) = \frac{1}{(r+1)!} \sum_{P \in N} \sum_{\Delta \in \text{st}_T(P)} f(x(P), \mathcal{K}(\Delta)) + \\ + \mathcal{J} D_p |F_1| J_L(p, T) .$$

$P \in N$ ist dabei eine Abkürzung für : P ist Eckpunkt eines Simplex von N und $\mathcal{K}(\Delta)$ ist der dem orientierten Simplex $p(\Delta)$ zugeordnete r -Vektor.

2.2 Aussagen über das Verhalten der Extremalen im Kleinen

Bei den beiden folgenden Sätzen ist die Voraussetzung $r = n-1$ wesentlich.

Wir betrachten die Fréchet-Mannigfaltigkeiten S_m (vgl. 2.1) mit den stetig differenzierbaren Parameterdarstellungen x_m . Nach Rademacher [14] (dort für $n = 3$, eine Einschränkung, die unwesentlich ist,) gibt es zu jeder

stetig differenzierbaren Funktionen x_m mit kompaktem Definitionsbereich $T \subset \mathbb{R}^r$ Folgen von Simplexpolyedern p_m , die die Approximationseigenschaften A.1, A.2 hinsichtlich x_m haben. In der Menge dieser Simplexpolyeder gibt es Folgen, die die Approximationseigenschaften A.1, A.2 gegenüber der Darstellung $x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Extremalen E haben. Wir wählen eine solche Folge aus und bezeichnen die Simplexpolyeder der Folge mit q_m . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß die Funktionen q_m in den Simplexes ihres Netzes Höchststrang haben.

Im folgenden wollen wir eine neue Folge von Simplexpolyedern konstruieren, die die Extremale E im Sinne von A.1 und A.2 approximieren, aber auch das Richtungsverhalten der Extremalen widerspiegeln. Diese Simplexpolyeder sind Elemente der Klassen $\bar{K}_m$, $m \in \mathbb{N}$, von Simplexpolyedern, die durch die folgenden Bedingungen definiert sind:

- 1) Die maximalen Kantenlängen D_p der Simplexpolyeder $p \in \bar{K}_m$

$$D_p := \max_{\Delta \in N_p} \max_{P, Q \in \Delta} |p(P) - p(Q)|$$

sind kleiner als D_m , wobei die D_m eine monotone Nullfolge bilden. Die minimalen Kantenlängen d_p

$$d_p := \min_{\Delta \in N_p} \min_{P, Q \text{ Eckpunkte von } \Delta} |p(P) - p(Q)|$$

der Simplexpolyeder aus $\bar{K}_m$ sind größer als $k_1 D_m$, wobei k_1 eine Konstante ist, $0 < k_1 \leq \frac{1}{2}$.

- 2) Sei $e_m := D(q_m, x)$ die Fréchet-Distanz der Fréchet-Mannigfaltigkeiten $[q_m]$ und E und $M_m := \min \{M : e_M \leq D_m^2\}$. Dann

sind die Simplexpolyeder $p \in \bar{K}_m$ einbeschrieben in eines der Simplexpolyeder q_M , wobei $M > M_m$, d.h. die Bilder der Eckpunkte der Simplizes Δ des Netzes N_p sind Elemente von $q_M(T)$.

- 3) Die Fréchet-Distanz von $[q_M]$, $M > M_m$ und $[p]$ ist kleiner als $(1+k_1)D_m$ für $p \in \bar{K}_m$.
- 4) Die Winkel in den Simplizes von $st(P)$ sind kleiner als die Hälfte des vollen Winkels, d.h. sei P ein Eckpunkt von $\Delta \in N_p$, $p \in \bar{K}_m$, T' die Zusammenhangskomponente von P des Urbildes von $q_M(T) \cap B^n(q_M(P), D_m)$, L eine r -dimensionale Ebene durch $q_M(P)$. Wenn die Orthogonalprojektion von $q_M(T')$, $T'' \subset T'$ auf L die Menge $L \cap B^n(q_M(P), k_1 D_m)$ überdeckt, dann gibt es in jedem Halbraum von L , auf dessen Rand $q_M(P)$ liegt, einen Punkt, der Projektion eines Eckpunktes von $st(P)$ ist.

Die Klassen $\bar{K}_m$ sind für hinreichend großes m nicht leer, denn die Bedingung 2) ist erfüllbar und 3) und 4) sind durch Aufteilung großer Simplizes in kleinere zu erreichen.

Wir betrachten nun zu jedem m die Teilklasse $K_m \subset \bar{K}_m$, deren Elemente p der Bedingung genügen:

- 5) Die Eckpunkte des Bildsimplexes $p(\Delta)$, $\Delta \in N_p$ seien mit $x_0, x_1, \dots, x_r$ bezeichnet. Dann ist für jede beliebige Numerierung der Eckpunkte von $p(\Delta)$ und alle $\Delta \in N_p$

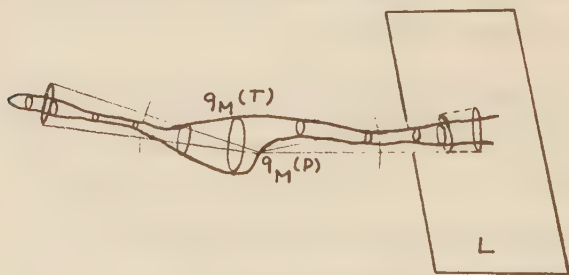
$$w(x_0, \Delta) := |(x_1 - x_0) \wedge \dots \wedge (x_r - x_0)| \left[\prod_{\alpha=1}^r |(x_\alpha - x_0)| \right]^{-1} >$$

$$> K > 0,$$

wobei K eine positive Konstante (für alle m) ist.

Wir wollen nun zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen über die Extremale E auch die Klassen K_m für hinreichend großes m nicht leer sind, wenn nur K geeignet gewählt ist. Um die Darstellung zu erleichtern, betrachten wir zunächst den Fall $r = 2$.

Sei $P \in T - \partial T$. Ist P Eckpunkt eines Simplexes $\Delta \in N_p$, $p \in \bar{K}_m$, so müssen (wegen 1)) die Bilder der Eckpunkte der Simplizes von $st_T(P)$ unter q_M in der Kugelschale $B^3(q_M(P), D_m) - B^3(q_M(P), k_1 D_m)$ liegen. Wir bezeichnen mit $\bar{T}_M$ die Zusammenhangskomponente von P in $q_M^{-1}(B^3(q_M(P), D_m))$. Dann sind kleine Winkel $w(x_0, \Delta)$ für $\Delta \in st_T(P)$ nur dann notwendig, wenn $q_M(\bar{T}_M) \cap [B^3(q_M(P), D_m) - B^3(q_M(P), k_1 D_m)]$ in höchstens zwei Kreiskegeln mit Mittelpunkt $q_M(P)$ und kleinen Öffnungswinkeln liegt (vgl. Skizze).



Sei dies der Fall, dann gibt es zu jedem Kreiskegel eine Hyperebene L , so daß der Schnitt von L mit $q_M(\bar{T}_M)$ eine geschlossene Kurve (evtl. entartet zu einem Punkt) in der Kugelschale $B^3(q_M(P), D_m) - B^3(q_M(P), k_1 D_m)$ enthält. Wir betrachten das Urbild dieser Schnittkurven bei q_M . Es gibt dann eine einfach geschlossene Urbildkurve $|K_M|$ (Bild einer Fréchet-Kurve vom Typ S^1), die alle anderen

Kurven in ihrem Innern $T_M \subset \bar{T}_M \subset T$ enthält und $P \in T_M$.

Definition: Wir nennen eine orientierte Fréchetkurve vom Typ S^1 oder B^1 , deren Bild in einer Ebene L liegt, einfach bis auf Berührung, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine orientierte Fréchetkurve vom Typ S^1 oder B^1 gibt, deren Bild eine einfache Jordan-Kurve in L ist, (die auch für Kurven vom Typ B^1 geschlossen sein darf) und wenn die Fréchet-Distanz der beiden Fréchetkurven kleiner als ε ist.

Ist die orientierte Fréchetkurve vom Typ $S^1 [q_M | |K_M|]$ einfach bis auf Berührung, so dürfen wir $q_M(|K_M|)$ als einfache Jordan-Kurve voraussetzen; denn dies ist durch eine Änderung von q_M mit beliebig kleinem Einfluß auf die Approximationseigenschaften A.1, A.2 zu erreichen. Das Bild der einfachen orientierten Fréchetkurve $q_M | |K_M|$ berandet dann ein orientiertes Gebiet $L_M \subset L$, das mit der Parameterdarstellung id zu einer Fréchet-Mannigfaltigkeit wird. Dann läßt sich eine Parameterdarstellung $\bar{q}_M$ von $[id, L_M]$ angeben, $\bar{q}_M : T_M \rightarrow L_M$, so daß $\bar{q}_M | |K_M| = q_M | |K_M|$ und daß, falls $Q_0 \in T_M$ mit

$$\eta(Q_0) := \frac{\partial \bar{q}_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \bar{q}_M}{\partial t^r} \Big|_{Q_0} \neq 0$$

existiert, für alle $Q \in T_M$ gilt: $\frac{\partial \bar{q}_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \bar{q}_M}{\partial t^r} \Big|_Q = c \eta(Q_0)$, $c \geq 0$. Eine stückweise lineare Darstellung $\bar{q}_M$ läßt sich z.B. mit Hilfe der Projektion von $q_M(T_M)$ auf L konstruieren.

Ist $[q_M, |K_M|]$ nicht einfach bis auf Berührung, so gibt es eine Fréchetkurve vom Typ B^1 , deren Bild $|K_0| \subset |K_M|$ ist, so, daß $[q_M, |K_0|]$ eine geschlossene bis auf Berührung einfache Kurve ist.

Definition: Wir nennen ein Paar (K_1, K_2) , $K_1 \neq K_2$, von Fréchetkurven vom gleichen Typ mit Parameterdarstellungen $k_\alpha : K'_\alpha \rightarrow |K_\alpha|$, $|K_\alpha| \subset T_M$, $\alpha = 1, 2$ Durchdringungslinien von q_M , wenn

- a) eine stückweise lineare, topologische Abbildung $i: K'_1 \rightarrow K'_2$ existiert, so daß $q_M \circ k_2 \circ i|_{K'_1} = q_M \circ k_1|_{K'_1}$,
- b) nicht Berührung längs $q_M(|K_2|)$ vorliegt, d.h. es gibt $\varepsilon_0 > 0$, so daß für alle $\varepsilon < \varepsilon_0$ gilt: es gibt keine topologische Abbildung $q: T_M \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D(q, q_M|_{T_M}) < \varepsilon$.

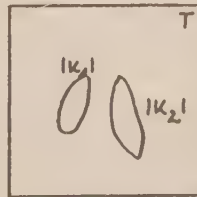
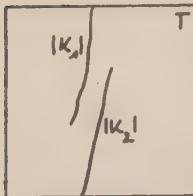
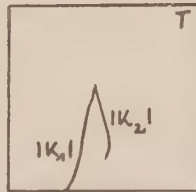
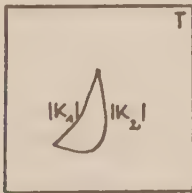
Hilfssatz: Zu jedem Kurvenbogen $|K_0| \subset |K_M|$, so daß $q_M(|K_0|)$ eine geschlossene, bis auf Berührung einfache Kurve in L ist, gibt es ein Paar (K_1, K_2) von Durchdringungslinien, so daß die Randpunkte P_1, P_2 von $|K_0|$ Randpunkte von $|K_1|, |K_2|$ sind mit $i \circ k_1^{-1}(P_1) = k_2^{-1}(P_2)$. Für den Verlauf von $|K_1|$ und $|K_2|$ in T_M gibt es die folgenden Möglichkeiten:

- 1) Die orientierten Kurven $|K_0|, |K_1|, |K_2|$ beranden ein Gebiet in T_M ,
- 2) Es gibt eine Kurve $|K'_0| \subset |K_M|$, so daß $|K_0|, |K_1|, |K_2|, |K'_0|$ ein Gebiet in T_M beranden,
- 3) Der Verlauf der Durchdringungslinien wird im Beweis beschrieben.

Beweis: Die Durchdringungslinien lassen sich rekursiv finden. Wir betrachten zunächst das Schnittverhalten der Sterne des Netzes von q_M , in denen P_1, P_2 liegen. Es gibt ein Paar von Strecken $(D_1^{(1)}, D_2^{(1)})$ mit $P_\alpha \in D_\alpha^{(1)}$, die Durchdringungslinien sind. Dann betrachten wir die Endpunkte von $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}$, die von P_1, P_2 verschieden sind und finden

Strecken $D_1^{(2)}$, $D_2^{(2)}$, so daß $K_x^{(2)} := D_x^{(1)} \cup D_x^{(2)}$, $x = 1, 2$ Durchdringungslinien sind, u.s.w.. Es wurde hier mit der Bildpunktmenge argumentiert; wie die Parametrisierung zu wählen ist, ist aber klar. Die Durchdringungslinien treffen sich entweder bei einem ν -ten Schritt, d.h. die Randpunkte $P_x^{(\nu)} \neq P_x$, $x = 1, 2$ der Durchdringungslinien $K_x^{(\nu)} = D_x^{(1)} \cup \dots \cup D_x^{(\nu)}$ sind gleich oder beide Durchdringungslinien treffen bei einem ν -ten Schritt den Rand von T_M .

Bemerkung: Da diese Aussage über das Schnittverhalten eine topologische ist, gilt sie nicht nur für T_M , sondern für T : Die Durchdringungslinien lassen sich rekursiv verlängern, bis entweder verschiedene Durchdringungslinien sich treffen oder jede sich schließt oder eine den Rand von T trifft (vgl. die folgenden Skizzen).



Der Verlauf der Durchdringungslinien ist aber nicht beliebig. Weil es sich um Durchdringungen handelt, gilt folgende Regel für Schnitte von Durchdringungslinien:

Seien (K_1, K_2) und $(\bar{K}_1, \bar{K}_2)$ zwei (nicht notwendig verschiedene) Paare von Durchdringungslinien, so daß K_1 und $\bar{K}_1$ sich schneiden, d.h. es gibt Parameterwerte $t_{11} \in K'_1$, $\bar{t}_{11} \in \bar{K}'_1$ mit $k_1(t_{11}) = \bar{k}_1(\bar{t}_{11})$ (die Bezeichnungen sind analog zu denen der Definition von Durchdringungslinien gewählt). Dann läßt sich $\bar{K}_1$ verlängern bis zu einem Schnitt mit K_2 , wobei der Parameterwert dieses Schnittpunktes auf K_2 $t_{21} = i(t_{11})$ ist. Sei der Parameterwert des Schnittpunktes auf $\bar{K}_1$ $\bar{t}_{12}$, so gilt wegen der Symmetrie: $\bar{K}_2$ schneidet K_1 und K_2 und für die Parameterwerte der Schnittpunkte $\bar{t}_{21} \in \bar{K}'_2$, $t_{12} \in K'_1$ bzw. $t_{22} \in K'_2$, $\bar{t}_{22} \in \bar{K}'_2$ gilt die Beziehung $t_{22} = i(t_{12})$, $\bar{t}_{21} = \bar{i}(\bar{t}_{11})$, $\bar{t}_{22} = \bar{i}(\bar{t}_{12})$.

Man kann für die orientierten Durchdringungslinien in T_M eine rechte und eine linke Seite definieren. Damit gilt: $\bar{K}_1, \bar{K}_2$ schneiden K_1 von einer Seite her kommend.

Falls bei einem Paar von Durchdringungslinien keine Selbstüberschneidungen vorkommen, liegt Fall 1) oder Fall 2) des Hilfssatzes vor, je nachdem, ob sich die Durchdringungslinien in T_M treffen oder bis zum Rand verlaufen. Der Fall 3) umfaßt die Durchdringungslinien mit Selbstüberschneidungen wie oben beschrieben. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

In allen Fällen definiert die geschlossene orientierte Kurve, gebildet aus $K_0, K_1, K'_0, -K_2$, wobei $-K_2$ die zu K_2 entgegengesetzt orientierte Kurve bezeichne und $K'_0 = \emptyset$ gesetzt werde, falls sich K_1, K_2 in T_M treffen, ein Inneres I und ein Äußeres A in T_M .

Der Parameterbereich I bzw. A wird durch q_M auf je ein orientiertes Polyeder abgebildet, dessen orientierter Rand $q_M(|K_0|) \cup q_M(|K'_0|)$ bzw. $q_M(|K_M| - (|K_0| \cup |K'_0|))$ ist.

Hilfssatz 2: Es liege einer der im vorigen Hilfssatz beschriebenen Fälle vor. Dann kann falls $|K'_0| \neq \emptyset$ o.B.d.A. vorausgesetzt werden, daß K'_0 einfach bis auf Berührung ist. Es gibt zu $[q_M, T]$ ein Vergleichspolyeder von gleichem topologischen Typ und gleichem Rand wie $[q_M, T]$ mit einer stückweise linearen Parameterdarstellung $v_M: T \rightarrow R^3$, so daß

$$v_M|_{T-T_M} = q_M|_{T-T_M}, \quad v_M|_{\partial T_M} = q_M|_{\partial T_M}$$

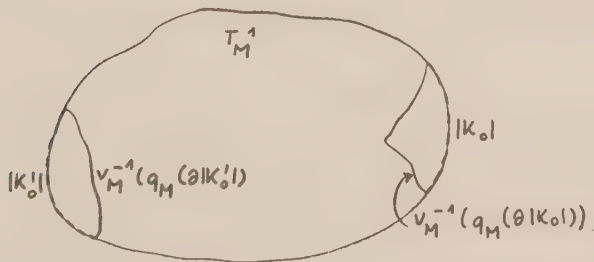
und eine Zerlegung von T_M in T_M^1 und T_M^2 , $T_M^1 \cap T_M^2 \subset \partial T_M^1$,

$T_M^1 \cup T_M^2 = T_M$ existiert mit $v_M(T_M^1) = q_M(A)$, $J_F(v_M|_{T_M^1}) =$

$$= J_F(q_M, A), \quad v_M(T_M^2) \subset L, \quad \frac{\partial v_M}{\partial t^1} \wedge \frac{\partial v_M}{\partial t^2} \Big|_Q \text{ gleichgerichtet}$$

für alle $Q \in T_M^2$ und

$$\int_{T_M^2} \frac{\partial v_M}{\partial t^1} \wedge \frac{\partial v_M}{\partial t^2} \Big|_{t^\alpha} dt^\alpha = \int_I \frac{\partial q_M}{\partial t^1} \wedge \frac{\partial q_M}{\partial t^2} \Big|_{t^\alpha} dt^\alpha$$



Beweis: Der Beweis verläuft konstruktiv. Da eine ausführliche Darstellung wegen vieler Bezeichnungen sehr aufwendig ist, geben wir nur die Beweisidee an.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Durchdringungslinien sich im Innern von T_M treffen. Wir führen die Konstruktion von v_M zurück auf die oben genannte Konstruktion für einfache Schnittkurven von L mit $q_M(\overline{T}_M)$. Wir konstruieren eine andere Parameterdarstellung $\overline{q}_M$ der Punktmenge $q_M(T_M)$ (bei gleichbleibendem F -Areal), so daß der Rand $q_M(|K_0|)$ eine geschlossene Kurve als Urbild bei $\overline{q}_M$ hat. Diese Darstellung $\overline{q}_M$ kann man aus q_M erhalten, indem man q_M nur in den Simplizes, die einen Eckpunkt auf einer der Durchdringungslinien haben, abändert. (Man baut vom Treffpunkt der Durchdringungslinien her die Durchdringungslinien ab, bis bei $\overline{q}_M$ schließlich der Treffpunkt im Urbild der Randkurve liegt.)

Betrachten wir nun den Fall $|K'_0| \neq \emptyset$. Falls $[q_M, |K'_0|]$ nicht einfach ist, gibt es eine Teilkurve von K'_0 mit von den Randpunkten auslaufende Durchdringungslinien. Wir können diese Durchdringung auf I beschränkt betrachten. Da $[q_M, |K'_0|]$ einfach war, können die neuen Durchdringungslinien nicht auf $|K_0|$ enden, sie treffen sich entweder in I oder laufen bis zu K'_0 . Da K'_0 ein Polygon mit endlicher Eckenzahl ist, kann man sukzessiv vorgehen und es bedeutet keine Einschränkung, $|K'_0|$ als einfach voranzusetzen.

Den Fall $|K'_0| \neq \emptyset$ führen wir auf den oben behandelten Fall $|K'_0| = \emptyset$ zurück. Wir erzeugen zwei Polyeder vom Typ $|K'_0| = \emptyset$,

indem wir den Wulst $q_M(I)$ an einer Stelle einschnüren, so daß also bei dem abgeänderten Polyeder die Durchdringungslinien sich an der Einschnürungsstelle treffen. Da die beiden Randkurven $[q_M, |K'_0|]$ und $[q_M, |K'_0|]$ Gebiete beranden, die die gleiche Orientierung haben, folgt für v_M schließlich, daß $\frac{\partial v_M}{\partial t^1} \wedge \frac{\partial v_M}{\partial t^2} \Big|_Q$ in allen Punkten $Q \in T_M^2$ gleichgerichtet sind.

Die letzte Gleichung des Hilfssatzes gilt, da $[q_M, I]$ und das zu $[v_M, T_M^2]$ entgegengesetzt orientierte Polyeder ein geschlossenes Polyeder in R^n bilden.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Im Falle $r > 2$ verfahren wir analog. Angenommen, alle Polyeder $p \in \bar{K}_m$ hätten in dem Eckpunkt P des Netzes N_p kleine Werte von $w(x_0, \Delta)$ für mindestens ein $\Delta \in st_T(P)$. Dann liegen die möglichen (von $p(P)$ verschiedenen) Eckpunkte von $st(P)$ im Durchschnitt von Kreiskegeln mit kleinen Öffnungswinkeln und der Kugelschale $B^n(p(P), D_m) - B^n(p(P), k_1 D_m)$. Bezeichne $\bar{T}_M$ die Zusammenhangskomponente von P in $q_M^{-1}(B^n(p(P), D_m))$. Dann gibt es eine geschlossene Berandung K_M einer Umgebung T_M von P , die Urbild bei q_M eines Schnittes von $q_M(\bar{T}_M) \cap (B^n(p(P), D_m) - B^n(p(P), k_1 D_m))$ mit einer Hyperebene L ist.

Ist $[q_M, L_M]$ einfach, (ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir "einfach" an Stelle von "einfach bis auf Berührung"; diese Begriffe sind analog zu denen für $r = 2$ zu definieren) dann gibt es ein Vergleichspolyeder mit der Parameterdarstellung $v_M, v_M(T_M) \subset L, v_M|_{T-T_M} = q_M|_{T-T_M}$,

$\frac{\partial v_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial v_M}{\partial t^r} \Big|_Q$ gleichgerichtet für alle $Q \in T_M$, wobei T_M der von K_M berandete Bereich ist.

Ist die Schnittmannigfaltigkeit nicht einfach bis auf Berührung, so gibt es Paare von $(r-2)$ -Durchdringungsmannigfaltigkeiten in K_M (in Analogie zu den Paaren von Durchdringungslinien zu definieren) und dazu Paare von $(r-1)$ -Durchdringungsmannigfaltigkeiten in T_M . Natürlich sind die topologischen Typen der Durchdringungsmannigfaltigkeiten hier vielfältiger als im Fall $r = 2$. Die beiden Hilfssätze übertragen sich sinngemäß.

Folgerungen: 1. Bei den beiden letzten Hilfssätzen ist die Eigenschaft der q_M , Approximationspolyeder an die Extremale zu sein, unwesentlich. Die Hilfssätze gelten also für Simplexpolyeder vom topologischen Typ des Würfels.

2. Daraus folgt insbesondere, daß der zweite Hilfssatz auf das in diesem Hilfssatz gewonnene v_M angewandt werden kann, falls nicht $v_M(T_M^{-1})$ schon in L liegt. Man kann also mit endlich vielen Anwendungen des Hilfssatzes 2 zu $[q_M]$ ein Vergleichspolyeder $[\bar{v}_M]$ konstruieren, so daß $v_M|_{T-T_M} = q_M|_{T-T_M}$ und daß zwei Zerlegungen von T_M in T_v und in I_v (das Innere bei Durchdringungen) existieren, $T_M = \bigcup T_v = \bigcup I_v$, $T_v \cap T_\mu \subset \partial T_v$, $I_v \cap I_\mu \subset \partial I_v$ und daß für alle v $\frac{\partial \bar{v}_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \bar{v}_M}{\partial t^r} \Big|_Q$ gleichgerichtet für alle $Q \in T_v$ und

$$\int_{T_v} \frac{\partial \bar{v}_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \bar{v}_M}{\partial t^r} \Big|_{t^\alpha} dt^\alpha = \int_{I_v} \frac{\partial q_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial q_M}{\partial t^r} \Big|_{t^\alpha} dt^\alpha$$

3. Hilfssatz 2 läßt sich auch auf die folgende allgemeinere Situation anwenden: Der Schnitt der Hyperebene L mit $q_M(T)$, $M > M_0$, enthalte eine (bis auf Berührung) einfache Berandung eines Bereichs von L ; es gibt Paare von $(r-1)$ -Durchdringungsmannigfaltigkeiten mit einem gemeinsamen Randstück in $\overset{\circ}{T}$, so daß die $(r-1)$ -Durchdringungsmannigfaltigkeiten mit dem Urbild der Berandung des Hyperebenenbereichs bei q_M ein Inneres I_M definieren. $q_M(I_M)$ sei in einer Kugel vom Radius D enthalten. Wir betrachten ein Gebiet $T_M \subset T$, in dem I_M enthalten ist. Dann gibt es ein Vergleichspolyeder $[v_M]$ vom gleichen Typ und mit gleichem Rand wie $[q_M]$, so daß $v_M|_{T-T_M} = q_M|_{T-T_M}$, und daß eine Zerlegung von $T_M = T_M^1 \cup T_M^2$, $T_M^1 \cap T_M^2 \subset \partial T_M^1$ existiert mit $v_M(T_M^1) = q_M(T_M - I_M)$, $J_F(v_M, T_M^1) = J_F(q_M, T_M - I_M)$,

$\frac{\partial v_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial v_M}{\partial t^r} \Big|_Q$ gleichgerichtet für $Q \in T_M^2$ und

$$\int_{T_M^2} \frac{\partial v_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial v_M}{\partial t^r} \Big|_{t^\alpha} dt^\alpha = \int_{I_M} \frac{\partial q_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial q_M}{\partial t^r} \Big|_{t^\alpha} dt^\alpha$$

Definition: Die Extremale E heißt reduziert, wenn für alle $P \in T$, $D > 0$ und Hyperebenen L gilt: Falls der Schnitt von L mit $q_M(T)$ für $M > M_0$ eine Punktmenge in der Kugelschale $B^n(q_M(P), D) - B^n(q_M(P), k_1 D)$ enthält, deren Urbild eine Berandung eines Bereiches $T_{L_1} \subset T$ enthält, so daß P innerer Punkt von T_{L_1} ist, so ist

$$\lim_{M \rightarrow \infty} J_F(q_M, T_M) > 0.$$

Wir geben ein Beispiel einer nicht reduzierten Extremalen an: das Variationsproblem lautet $J_L(x, B^2) = \min$, wobei die

Einheitssphäre S^1 mit der Identität als Parameterdarstellung als Rand vorgeschrieben ist. Die Parameterdarstellung von E ist $x: B^2 \rightarrow R^3$

$$x = (\varphi - \frac{1}{2})(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \text{ für } \frac{1}{2} \leq \varphi \leq 1,$$

$$x = (0, 0, 1-4\varphi^2) \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}.$$

Für $r > 1$ hat man also bei den betrachteten Variationsproblemen keine Eindeutigkeit der Extremalen mehr.

Satz A: Die Extremale E sei reduziert. Es liege die Situation von Hilfssatz 2 oder die der Folgerung 3 vor. Dann gilt (mit den gleichen Bezeichnungen wie bei Hilfssatz 2)

$$\lim_{M \rightarrow \infty} J_L(q_M, I_M) < \varphi(D) \lim_{M \rightarrow \infty} J_L(v_M, T_M^2),$$

wobei $\varphi(D)$ eine stetige Funktion in $[0,1]$ ist mit $\varphi(0)=1$.

Beweis: Sei M_0 so gewählt, daß $\inf_{M > M_0} J_L(v_M, T_M^2) > 0$, dann sind die Größen

$$\delta_M := \frac{J_L(q_M, I_M) - J_L(v_M, T_M^2)}{J_L(q_M, I_M)} \geq 0$$

nach oben beschränkt. Mit Hilfe des Satzes aus 1.2 erhalten wir mit $F_0(X_1, \dots, X_r) := F(x_0, X_1, \dots, X_r)$, wobei $x_0 \in v_M(T_M^2)$

$$(6) \quad J_{F_0}(q_M, I_M) - J_{F_0}(v_M, T_M^2) \geq \varepsilon(\delta_M) J_L(v_M, T_M^2).$$

Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von F nach x^i folgt aus der Extremalität von E

$$(7) \quad J_F(q_M, I_M) - J_F(v_M, T_M^2) = J_{F_0}(q_M, I_M) - J_{F_0}(v_M, T_M^2) +$$

$$+ \int_{I_M} F_i(x, \frac{\partial q_M}{\partial t^\alpha})(q_M^i - x_0^i) dt^\alpha - \int_{T_M^2} F_i(\bar{x}, \frac{\partial v_M}{\partial t^\alpha})(v_M^i - x_0^i) dt^\alpha \leq \tilde{\delta}_M$$

Dabei sind $r(t^\alpha) = x_0 + \varphi(q_M(t^\alpha) - x_0)$, $\bar{r} = x_0 + \bar{\varphi}(q_M(t^\alpha) - x_0)$,
 $0 \leq \varphi, \bar{\varphi} \leq 1$ und $\lim_{M \rightarrow \infty} \delta_M = 0$

Aus (6) und (7) folgt

$$\int_{T_M^1} F_i(\bar{r}, \frac{\partial v_M}{\partial t^\alpha})(v_M^i - x_0^i) dt^\alpha - \int_{I_M} F_i(r, \frac{\partial q_M}{\partial t^\alpha})(q_M^i - x_0^i) dt^\alpha \\ \geq \varepsilon(\delta_M) J_L(v_M, T_M^2) + \delta_M,$$

andererseits gilt, daß die linke Seite der letzten Ungleichung betragsmäßig kleiner als

$$2|F_i| \max_{x \in q_M(I_M) \cup v_M(T_M^2)} |x - x_0^i| \cdot (J_L(q_M, I_M) + J_M(v_M, T_M^2)) \\ \leq C \cdot D(\delta_M + 2) \cdot J_L(v_M, T_M^2),$$

$$\text{wobei } C = 4 \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \max_{x \in G} |F_i(x, X_\alpha)| \quad . \\ |X_1 \wedge \dots \wedge X_r| = 1$$

Daraus folgt:

$$\lim_{D \rightarrow 0} \lim_{M \rightarrow \infty} \sup \varepsilon(\delta_M) = 0.$$

Wegen der Monotonie von ε heißt das für δ_M :

$$\lim_{D \rightarrow 0} \lim_{M \rightarrow \infty} \sup \delta_M = 0,$$

woraus die Behauptung des Satzes folgt.

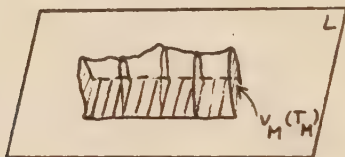
Folgerung. 1. Zu $[q_M]$, $M > M_0$ gebe es ein Vergleichs-
 polyeder $[v_M]$ und einen Parameterbereich $T_M = T_M^1 \cup T_M^2$,
 $T_M^1 \cap T_M^2 \subset \partial T_M^1$, so daß $v_M|_{T-T_M} = q_M|_{T-T_M}$, $v_M|_{T_M^1}$ Para-
 meterdarstellung eines Polyeders in einer Hyperebene L ,

$$\int_{T_M} \frac{\partial v_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial v_M}{\partial t^r} \Big|_t dt^\alpha = \int_{T_M} \frac{\partial q_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial q_M}{\partial t^r} \Big|_t dt^\alpha .$$

Die Punktmenge $q_M(T_M) \cup v_M(T_M)$ sei in einer Kugel vom Radius D enthalten und

$$I_L(v_M, T_M^2) < \sigma(D) \cdot I_L(v_M, T_M),$$

wobei $\sigma(D)$ eine stetige Funktion mit $\sigma(0) = 0$ ist.



Dann gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_L(q_M, T_M) \leq \bar{\varphi}(D) \lim_{M \rightarrow \infty} I_L(v_M, T_M) + \bar{\sigma}(D)$$

mit stetigen Funktionen $\bar{\varphi}$, $\bar{\sigma}$, so daß $\bar{\varphi}(0) = 1$, $\bar{\sigma}(0) = 0$.

2. Das Ergebnis von Satz A läßt sich folgendermaßen interpretieren: Für kleines D verlaufen die $[q_M, T_M]$ (in den in Satz A betrachteten Fällen) in einer kleinen Umgebung der $[v_M, T_M]$. Daraus folgt, daß bei der reduzierten Extremalen für genügend kleines D kleine Werte von $w(x_0, \Delta)$ nicht mehr nötig sind. Es gibt also $K > 0$, so daß die definierende Forderung 5) der Polyeder von K_m für $m > m_0(K)$ erfüllt werden kann und K_m für $m > m_0(K)$ nicht leer ist.

Definition:

$P \in T$ heiße (c, m) -Singularität, wenn es in der Klasse K_m ein S-Polyeder $[p_m]$ gibt, $P \in \Delta \in N_{pm}$, so daß für 2 Simplexes $\Delta_\nu, \Delta_\mu \in st_T(P)$, deren Durchschnitt $(r-1)$ -dimensional ist, gilt:

$$\left| \frac{\mathcal{H}_\nu}{|\mathcal{H}_\nu|} - \frac{\mathcal{H}_\mu}{|\mathcal{H}_\mu|} \right| > c,$$

wobei $\mathcal{H}_\nu$, $\mathcal{H}_\mu$ die den Simplexes $p_m(\Delta_\nu)$, $p_m(\Delta_\mu)$ zugeordneten r -Vektoren sind.

Einen Stern mit der in der Definition genannten Eigenschaft nennen wir c -singulär, Sterne die dieser Bedingung nicht genügen c -regulär.

Satz B: $P_0 \in T$ gehöre nicht zur Zusammenhangskomponente eines Punktes $Q \in \partial T$ in $x^{-1}(x(\partial T))$. P_0 habe die folgenden Eigenschaften:

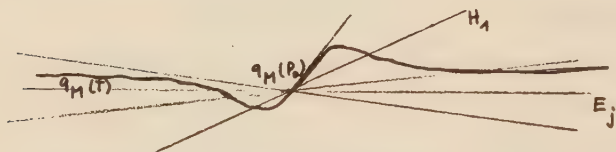
- a) Zu einer vorgegebenen Nullfolge (c_j) , $c_j > 0$ gibt es eine Folge $m_j \rightarrow \infty$, so daß $P(c_j, m_j)$ -regulär ist,
- b) T_j bezeichne die Zusammenhangskomponente von P_0 in $x^{-1}(x(T)) \cap B^n(x(P_0), D_{m_j})$. $x|_{T_j}$ sei einfach bis auf Berührung, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine injektive stetige Abbildung $y : T_j \rightarrow \mathbb{R}^n$, so daß $|x(t^\alpha) - y(t^\alpha)| < \varepsilon$ für alle $t^\alpha \in T_j$. T_j kann o.B.d.A. als topologisches Bild von B^r angenommen werden.

Dann gibt es eine Nullfolge $(\bar{c}_j)$, $\bar{c}_j > 0$, so daß P_0 $(\bar{c}_j, m)$ -regulär ist für $m > m_j$. Die Nullfolge ist nicht von $P_0 \in T$ abhängig.

Beweis: Wir nehmen an, P_0 wäre (c, m_1) -singulär für $c > 0$, m_1 eine Folge $m_1 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$. Sei m_0 ein Element dieser Folge und $m_j < m_0$, so daß P_0 (c_j, m_j) -regulär ist (c_j, m_j aus den in der Voraussetzung a) genannten Folgen). In einem c -singulären Stern $st_T(P_0)$ eines Polyeders aus K_{m_0} gibt es

ein Simplex, so daß die Hyperebene H_0 , in der das Bild dieses Simplex liegt, den maximalen (bzgl. der Simplizes des betrachteten c-singulären Sterns) Winkel mit der Hyperebene E_j bildet.

Wir betrachten den Schnitt der Hyperebene H_1 mit den Rademacher Approximationspolyedern q_M , die den Winkel zwischen E_j und H_0 halbiert.



Querschnitt

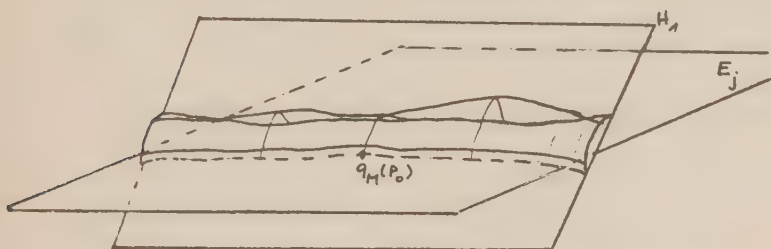
Angenommen, das Schnittpolyeder sei eine Berandung, dann wäre wegen Satz A (angewandt auf die Sterne von q_M) das Lebesguesche Areal des von dem Schnittpolyeder berandeten Teilpolyeders von $q_M(T)$ relativ zum Lebesgueschen Areal des von dem Schnittpolyeder berandeten Polyeders in H_1 zu groß, d.h. der Quotient der Lebesgueschen Areale wäre größer als eine Zahl $\delta(c, m_j)$, wobei $\lim_{j \rightarrow \infty} \inf \delta(c, m_j) > 1$ im Widerspruch zu Satz A.

Wir wollen zeigen, daß die Situation von Folgerung 1 aus Hilfssatz 2 vorliegt.

Sei e_1 ein Vektor des Vektorraums der $(n-2)$ -dimensionalen Ebene $E_j \cap H_1$ und der Vektor e_n senkrecht zu E_j . Wir schneiden E_j und $q_M(T)$ mit Hyperebenen H_2, H_3 im Abstand

r_2, r_3 von $q_M(P_0)$, $k_1 D_{mj} \leq r_2, r_3 \leq D_{mj}$, deren Normalenvektoren $e_1 + \delta e_n$ bzw. $e_1 - \varepsilon e_n$, $\varepsilon > 0$ sind.

$q_M^{-1}(\bigcup_{x=1}^3 H_x \cap q_M(T))$ enthält eine Berandung. Die Zusammenhangskomponente von P_0 in dem von dieser Berandung berandeten Bereich bezeichnen wir mit T_M . In H_1, H_2, H_3



werden von dem orientierten Rand $q_M(\partial T_M)$ und Teilen der Schnitte von H_1, H_2, H_3 orientierte Polyeder berandet. Für diese Polyeder gibt es eine stückweise lineare Parameterdarstellung v_M mit dem Parameterbereich T_M , so daß $v_M|_{\partial T_M} = q_M|_{\partial T_M}$ und eine Zerlegung von $T_M = T_M^1 \cup T_M^2 \cup T_M^3$, $T_M^v \cap T_M^\mu \subset \partial T_M^v$ für $v \neq \mu$ existiert mit

$v_M(T_M^v) \subset H_v$, $\frac{\partial v_M}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial v_M}{\partial t^v} \Big|_{t^v}$ gleichgerichtet für $t^v \in T_M^v$ jeweils für $v = 1, 2, 3$.

Die Konstruktion kann mit Hilfe der Projektion von $q_M(T_M)$ in Richtung e_n auf die genannten Hyperebenenbereiche erfolgen. Man muß das projizierte Polyeder so abändern, daß schließlich v_M^{-1} beschränkt auf das Innere der Bildsimplices bei v_M eine Abbildung ist. Das ist möglich, da $q_M|_{T_M}$ wegen Voraussetzung a) als topologisch vorausgesetzt werden kann.

Wegen Satz A (angewandt auf $q_M(T_M)$) können r_2, r_3, ε so gewählt werden, daß

$$I_L(v_M, T_M^2 \cup T_M^3) < \sigma(c, c_j, m_j) \cdot I_L(v_M, T_M^1)$$

mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma(c, c_j, m_j) = 0$ für alle c . Andererseits gilt

$$I_L(q_M, T_M) - I_L(v_M, T_M) > \delta(c, c_j, m_j) \cdot I_L(v_M, T_M), \text{ wobei}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \inf \delta(c, c_j, m_j) > 1.$$

Damit liegt ein Widerspruch zu Folgerung 1 von Satz A vor.

2.3 Der Approximationssatz

Das S-Polyeder $[p] \in K_m$ sei in $S_{\mu(p)}$ eingeschrieben.

Wir wollen im folgenden Parameterdarstellungen von

$S_{\mu(p)}$ benutzen, die auf die Darstellung $[p]$ abgestimmt sind.

Seien $\bar{x}_\mu$ Parameterdarstellungen von S_μ ; $A(p)$ sei die Menge der Diffeomorphismen τ von T auf T mit positiver Funktionaldeterminante, für die $\tau(P) = P$, falls P ein Eckpunkt des Netzes N_p von p ist;

$$i(p) := \inf_{\tau \in A(p)} \int_T |(\bar{x}_{\mu(p)} \circ \tau - p)(t^\alpha)| dt^\alpha.$$

Falls $i(p) = 0$, können wir $S_{\mu(p)}$ durch das S-Polyeder $[p]$ in der Folge der Approximationsflächen ersetzen; denn wegen Satz A aus 2.2 folgt aus $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_T |(\bar{x}_{\mu(p)} \circ \tau_{N-p})(t^\alpha)| dt^\alpha = 0$

$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{P \in T} |(\bar{x}_{\mu} \circ \tau_{N-p})(P)| = 0$, so daß der Fréchet-Abstand von $[p]$ und $S_{\mu} \cap 0$ ist. Wegen der Unterhalbstetigkeit von J_F gilt $J_F(p_m, T) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} J_F(\bar{x}_{\mu(p)} \circ \tau_N)$.

Sei $i(p) > 0$, dann gibt es $\tau_p \in A(p)$, so daß

$$\int_T |(\bar{x}_{\mu(p)} \circ \tau_{p-p})(t^\alpha)| dt^\alpha < i(p) \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Im folgenden benutzen wir nur die an S-Polyeder $[p]$ adaptierten Parameterdarstellungen $x_p := \bar{x}_{\mu} \circ \tau_p$.

Wir betrachten nun

$$L_1 := \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \sup_{p \in K_m} \sum_{\Delta \in N_p} \left| \int_{\Delta} \frac{\partial x_p}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x_p}{\partial t^r} dt^\alpha \right|$$

$$L_2 := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_T \left| \frac{\partial x_m}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x_m}{\partial t^r} \right| dt^\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} J_L(S_m).$$

Aus der starken Konvexität von L folgt $L_1 \leq L_2$. Wir untersuchen zunächst den Fall $L_1 = L_2$; es wird sich später herausstellen, daß $L_1 < L_2$ nicht möglich ist.

Satz: Sei $L_1 = L_2$; dann gibt es eine Folge $\{[p_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ von S-Polyedern $[p_m] \in K_m$, so daß

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_F(p_m, T) = J_F(x, T).$$

Beweis: Aus $L_1 = L_2$ folgt, daß es eine Folge $\{[p_{m_i}]\}_{i \in \mathbb{N}}$ von S-Polyedern aus K_{m_i} gibt, so daß

$$L_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in N_{p_{m_i}}} \left| \int_{\Delta} \frac{\partial x_{p_{m_i}}}{\partial t^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial x_{p_{m_i}}}{\partial t^r} \Big|_t dt^\alpha \right|.$$

Um Indizes zu vermeiden, setzen wir m statt m_i und $x_m := x_{p_m}$. Den r -Vektor $\frac{\partial x_m}{\partial t^1}(t^\alpha) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial x_m}{\partial t^r}(t^\alpha)$ schreiben wir abkürzend $\mathcal{H}_m(t^\alpha)$. Für die Simplexes $\Delta \in N_{p_m}$ mit $\int_{\Delta} |\mathcal{H}_m(t^\alpha)| dt^\alpha \neq 0$ definieren wir

$$\sigma_{\Delta} := \frac{\int_{\Delta} |\mathcal{H}_m(t^\alpha)| dt^\alpha - \left| \int_{\Delta} \mathcal{H}_m(t^\alpha) dt^\alpha \right|}{\int_{\Delta} |\mathcal{H}_m(t^\alpha)| dt^\alpha}.$$

Zu $\sigma > 0$ betrachten wir nun $M_m(\sigma) := \bigcup_{\substack{\Delta \in N_{p_m} \\ \sigma_{\Delta} > \sigma}} \Delta$

Aus der Definition von $M_m(\sigma)$ folgt sofort:

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{H}_m(t^\alpha)| dt^\alpha - \sum_{\Delta \subset M_m(\sigma)} \left| \int_{\Delta} \mathcal{H}_m(t^\alpha) dt^\alpha \right| &\geq \\ &\geq \sigma \int_{M_m(\sigma)} |\mathcal{H}_m(t^\alpha)| dt^\alpha \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus $L_1 = L_2$, daß zu $\varepsilon > 0$ $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\int_{\tau} |\mathcal{H}_m(t^\alpha)| dt^\alpha - \sum_{\Delta \in N_{p_m}} \left| \int_{\Delta} \mathcal{H}_m(t^\alpha) dt^\alpha \right| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_0(\varepsilon).$$

Daraus ergibt sich für jedes feste $\sigma > 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{M_m(\sigma)} |\mathcal{H}_m(t^\alpha)| dt^\alpha = 0$$

Zu jeder monotonen Nullfolge (σ_i) , $\sigma_i > 0$, gibt es eine

Teilfolge m_i , so daß $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{M_{m_i}(\sigma_i)} |\mathcal{K}_{m_i}(t^\alpha)| dt^\alpha = 0$

oder mit $\sigma_i =: \sigma_m$ für $m_i \leq m < m_{i+1}$ gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{M_m(\sigma_m)} |\mathcal{K}_m(t^\alpha)| dt^\alpha = 0.$$

Das Flächenstück $[x_m, \Delta]$ sei durch Rademacher-Polyeder $[q_1, \Delta]$ approximiert, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ $l_0(\varepsilon)$, so daß für $l > l_0(\varepsilon)$

$$\left| \int_{\Delta} \mathcal{K}_m(t^\alpha) dt^\alpha - \int_{\Delta} \frac{\partial q_1}{\partial t^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial q_1}{\partial t^r} \Big|_{t^\alpha} dt^\alpha \right| < \varepsilon$$

und

$$\left| \int_{\Delta} |\mathcal{K}_m(t^\alpha)| dt^\alpha - \int_{\Delta} \left| \frac{\partial q_1}{\partial t^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial q_1}{\partial t^r} \Big|_{t^\alpha} \right| dt^\alpha \right|$$

Die r -dimensionalen Simplexseiten von q_1 seien numeriert und die ihnen zugeordneten r -Vektoren mit $\eta_1, \dots, \eta_N$ bezeichnet. Dann bilden die r -Vektoren

$-\int_{\Delta} \mathcal{K}_m(t^\alpha) dt^\alpha$ und η_ν , $\nu = 1, \dots, N$ in $\bigwedge^r \mathbb{R}^n$ einen

Polygonzug, dessen Endpunkte einen Abstand kleiner als ε haben. Nach Definition von σ_Δ ist die Differenz der Lebesgueschen Längen der Polygonzüge $\{\eta_\nu\}$ und

$\{-\int_{\Delta} \mathcal{K}_m(t^\alpha) dt^\alpha\}$ angenähert (wegen der Approximation von x_m durch q_1) gleich dem σ_Δ -fachen der Lebesgueschen Länge von $\{\eta_\nu\}$.

Daraus folgt, daß mit $\mathcal{K}_\Delta := \int_{\Delta} \mathcal{K}_m(t^\alpha) dt^\alpha$

$$(9) \int_{M_\eta} |\mathcal{K}_m(t^\alpha)| dt^\alpha \cdot \left[\int_\Delta |\mathcal{K}_m(t^\alpha)| dt^\alpha \right]^{-1} < g(\sigma_\Delta, \eta),$$

$$M_\eta := \{t^\alpha \in \Delta : \mathcal{K}_m(t^\alpha) \neq 0, |(\mathcal{K}_m(t^\alpha))_u - (\mathcal{K}_\Delta)_u| > \eta\}$$

wobei $g(\sigma_\Delta, \eta)$ eine Funktion $g: [0, \infty] \times (0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, die monoton wachsend hinsichtlich σ_Δ und monoton fallend hinsichtlich η ist mit $\lim_{\sigma_\Delta \rightarrow 0} g(\sigma_\Delta, \eta) = 0$ für alle $\eta \in (0, 2]$. Zu σ_m gibt es also eine Nullfolge η_m , sodaß

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g(\sigma_m, \eta_m) = 0.$$

Wir vergleichen nun den r -Vektor $\int_\Delta \frac{\partial p_m}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial p_m}{\partial t^r} |_{t^\alpha} dt^\alpha$
 $= (p_m(P_1) - p_m(P_0)) \wedge \dots \wedge (p_m(P_r) - p_m(P_0))$, der der orientierten Simplexseite $p_m(\Delta)$ zugeordnet ist, mit $\mathcal{K}_\Delta$. Für den Abstand a_ν der Punkte $x_m(P_\nu)$, $\nu = 0, 1, \dots, r$ von der durch $x_m(P_0)$ verlaufenden Ebene mit der r -Richtung $\mathcal{K}_\Delta$ ($r = n-1$) gilt wegen (9) und Satz A aus 2.2

$$\frac{a_\nu}{D_m} \leq 0_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} 0_m = 0$$

Die Konvergenz der r -Vektoren $(\int_\Delta \frac{\partial p_m}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial p_m}{\partial t^r} |_{t^\alpha} dt^\alpha)_u$ gegen $(\mathcal{K}_\Delta)_u$ folgt daraus.

Sei $\mathcal{Q}$ die Menge der gemeinsamen $(r-1)$ -Simplizes $\square = \Delta_1 \cap \Delta_2$, von r -Simplizes Δ_1, Δ_2 , wobei $\Delta_\kappa \in \mathcal{C}(M_m(\sigma_m) \cup \partial T)$, $\kappa = 1, 2$. Wir behaupten, daß es zu $\varepsilon > 0$ $m(\varepsilon)$ so gibt, daß die Fréchet-Distanz $D([x_m, \square], [p_m, \square]) < \varepsilon$ für $\square \in \mathcal{Q}$ $m > m(\varepsilon)$. Denn zu (m, ε) gibt es eine Nullfolge $\delta_m(\varepsilon)$, so daß die Behauptung für $\square = \Delta_1 \cap \Delta_2 \in \mathcal{Q}$ mit $|(\mathcal{K}_{\Delta_1})_u - (\mathcal{K}_{\Delta_2})_u| > \delta_m(\varepsilon)$ schon folgt, da $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{C}(M_m(\sigma_m) \cup \partial T)$. Sei $\square = \Delta_1 \cap \Delta_2 \in \mathcal{Q}$ mit

$|(\mathcal{K}_{\Delta_1})_u - (\mathcal{K}_{\Delta_2})_u| > \delta_m(\varepsilon)$, dann folgt die Behauptung wegen der oben gewählten, an p_m angepaßten Darstellung von $S_{\mu(p_m)}$. Daraus folgt für $\Delta \in \mathcal{U}(M_m(\varepsilon_m) \cup \partial T)$

$$(10) \quad \left| \int_{\Delta} \mathcal{K}_m dt^\alpha - \int_{\Delta} \frac{\partial p_m}{\partial t^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial p_m}{\partial t^r} |t^\alpha dt^\alpha| \right| \leq \bar{0}_m \left| \int_{\Delta} \mathcal{K}_m dt^\alpha \right|$$

mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{0}_m = 0$. Für die Vereinigung S_m der Simplexes Δ , für die (10) nicht gilt, haben wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in S_m} \int_{\Delta} |\mathcal{K}_m(t^\alpha)| dt^\alpha = 0.$$

Für die folgenden Abschätzungen der Variationsintegrale ist es von Vorteil, von der globalen Darstellung mit Hilfe der Parameter t^α zu lokalen Darstellungen überzugehen. Dabei kommt uns die Parameterinvarianz des Variationsintegrals zustatten.

Für jedes $\Delta \in N_{p_m}$ führen wir durch eine lineare Transformation $\varphi_\Delta: \Delta \rightarrow \Delta_u$, Δ_u das Simplex mit den Eckpunkten $(u_0^\alpha) = \sigma$, $(u_v^\alpha) = (\mathcal{J}_v^{\bar{x}})(p_m(p_v) - p_m(p_0))$, $v = 1, \dots, r$ neue Parameter u^α ein.

Wegen (10) gibt es eine Darstellung $\bar{x}_m(u^\alpha) := x_m \circ \tau \circ \varphi_\Delta^{-1}(u^\alpha)$ von $[x_m, \Delta]$, τ ein Diffeomorphismus von Δ auf Δ mit positiver Funktionaldeterminante, so daß für alle festen $\lambda > 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in N_{p_m}} \int_{\bar{M}_\Delta(\lambda)} \left| \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^r} |u^\alpha| du^\alpha \right| = 0,$$

wobei

$$\bar{M}_\Delta(\lambda) := \left\{ (u^\alpha) \in \Delta_u : \left| \frac{\partial \bar{x}_m(u^\alpha)}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial (p_m \circ \varphi_\Delta^{-1})(u^\alpha)}{\partial u^\alpha} \right| > \lambda \left| \frac{\partial p_m \circ \varphi_\Delta^{-1}(u^\alpha)}{\partial u^\alpha} \right| \right\}$$

Daraus folgt, daß es eine Nullfolge λ_m gibt, so daß

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in N_{p_m}} \int_{\bar{M}_\Delta(\lambda_m)} \left| \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^r} \right| du^\alpha = 0.$$

Nun schätzen wir die Differenzen der Variationsintegrale von $[p_m]$ und $[x_m]$ ab. Wir kürzen $p_m \circ \varphi_\Delta^{-1}$ durch $\bar{p}_m$ ab.

$$\begin{aligned} & \int_T \left[F(x_m, \frac{\partial x_m}{\partial t^\alpha}) - F(p_m, \frac{\partial p_m}{\partial t^\alpha}) \right] dt^\alpha = \\ &= \sum_{\Delta \in N_{p_m}} \int_{\varphi_\Delta(\Delta)} \left[F(\bar{x}_m, \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^\alpha}) - F(\bar{p}_m, \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha}) \right] du^\alpha \\ &= \sum_{\Delta \in N_{p_m}} \int_{\varphi_\Delta(\Delta_m)} \left[F(\bar{x}_m, \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^\alpha}) - F(\bar{p}_m, \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha}) \right] du^\alpha + o_m \end{aligned}$$

mit $\lim_{m \rightarrow \infty} o_m = 0$ wegen F.4.

Wir betrachten die Summanden und wenden den Mittelwertsatz an

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi_\Delta(\Delta_m)} \left[F(\bar{x}_m, \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^\alpha}) - F(\bar{p}_m, \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha}) \right] du^\alpha = \int_{\varphi_\Delta(\Delta_m)} [F_1(r, R_\beta) (\bar{x}_m^1 - \bar{p}_m^1) + \\ &+ F_1^\beta(r, R_\alpha) (\frac{\partial \bar{x}_m^1}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \bar{p}_m^1}{\partial u^\beta})] du^\alpha. \end{aligned}$$

mit den Zwischenwerten $r = \bar{x}_m + \vartheta(\bar{p}_m - \bar{x}_m)$, $R_\beta = \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^\beta} +$

$$+ \vartheta \left(\frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^\beta} \right), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Wegen der Homogenitätseigenschaften von F_i und F_i^α und der Stetigkeit von F_i und F_i^α gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{H}_\Delta(\lambda_m)} [F_i(r, R_\beta)(\bar{x}_m^i - \bar{p}_m^i) + F_i^\alpha(r, R_\beta)(\frac{\partial \bar{x}_m^i}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \bar{p}_m^i}{\partial u^\beta})] du^\alpha \right| \leq \\ & \leq |F_i| \cdot 2 D_m \cdot \int_{\mathcal{H}_\Delta(\lambda_m)} |R_1 \wedge \dots \wedge R_r| du^\alpha + |F_i^\alpha| \int_{\mathcal{H}_\Delta(\lambda_m)} \sum_{\beta=1}^r \prod_{\beta \neq \alpha} |R_\beta| \cdot \\ & \quad \cdot \left| \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} \right| du^\alpha, \end{aligned}$$

$$\text{dabei ist } |F_i| = n \max_{1 \leq i \leq n} \max_{\substack{x \in G \\ |R_\alpha| = 1}} \left| \frac{\partial f(x, \mathcal{X})}{\partial x^i} \right|,$$

$$|F_i^\alpha| = r \cdot n \max_{i, \alpha} \max_{\substack{x \in G \\ |R_\alpha| = 1}} |F_i^\alpha(x, R_\beta)|.$$

$$\begin{aligned} \text{Da } |R_\alpha| &= \left| \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} + \mathcal{J} \left(\frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^\alpha} \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} \right| (1 + 2 \lambda_m), \end{aligned}$$

haben wir

$$\begin{aligned} |R_1 \wedge \dots \wedge R_r| &\leq \prod_{\alpha=1}^r |R_\alpha| \leq (1 + 2 \lambda_m)^r \prod_{\alpha=1}^r \left| \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} \right| \\ \left| \sum_{\alpha=1}^r \prod_{\beta \neq \alpha} |R_\beta| \cdot \left(\frac{\partial \bar{x}_m}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} \right) \right| &\leq r (1 + 2 \lambda_m)^{r-1} \lambda_m \prod_{\alpha=1}^r \left| \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} \right|. \end{aligned}$$

$$\text{Wegen } \prod_{\alpha=1}^r \left| \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} \right| = \left| \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^r} \right| \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}_\Delta(\lambda_m)} \prod_{\alpha=1}^r \left| \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^\alpha} \right| du^\alpha &= \int_{\mathcal{H}_\Delta(\lambda_m)} \left| \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial u^r} \right| du^\alpha = \\ &= \int_{\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{H}_\Delta(\lambda_m))} \left| \frac{\partial p_m}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial p_m}{\partial t^r} \right| dt^\alpha = J_L(p_m, \Delta). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\left| \int_{\tau} \left[F(x_m, \frac{\partial x_m}{\partial t^\alpha}) - F(p_m, \frac{\partial p_m}{\partial t^\alpha}) \right] dt^\alpha \right| \leq C_1 \cdot D_m \cdot J_L(p_m, T) + \\ + C_2 \cdot \lambda_m \cdot J_L(p_m, T) + \bar{O}_m ,$$

wobei C_1, C_2 Konstanten sind und $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{O}_m = 0$. $J_L(p_m, T)$ ist beschränkt (vgl. $\bar{M}_\Delta(\lambda_m)$), also haben wir das gewünschte Resultat.

Hilfssatz: Es gilt $L_1 = L_2$.

Beweis: Angenommen $L_1 < L_2$: sei $[p_i]$ eine Folge von S-Polyedern aus K_{m_i} , so daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in N_{p_i}} \left| \int_{\Delta} \mathcal{H}_1(t^\alpha) dt^\alpha \right| = L_1 .$$

Wir betrachten nun die Folgen

$$a_M(\Delta) = \sum_{\Delta' \in N_{p_M}} \left| \int_{\Delta' \cap \Delta} \mathcal{H}_M(t^\alpha) dt^\alpha \right| , M > m$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß für jedes $\Delta \in N_{p_i}$ die Folge $a_M(\Delta)$ konvergiert, denn sonst könnten wir uns auf konvergente Teilfolgen beschränken. Da die Menge der Simplizes $\Delta \in N_{p_i}$ $i \in \mathbb{N}$ abzählbar ist, gibt es eine Teilfolge (i_j) von (i) , so daß für alle $\Delta \in N_{p_{i_j}}$ die Folgen $a_{i_j}(\Delta)$ konvergieren:

$$I_\Delta := \lim_{j \rightarrow \infty} a_{i_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{\Delta' \in N_{p_{i_j}}} \left| \int_{\Delta' \cap \Delta} \mathcal{H}_{i_j} dt^\alpha \right| .$$

Wir bezeichnen mit φ_Δ die Größe, die

$$I_\Delta \cdot \varphi_\Delta = I_\Delta - \left| \int_{\Delta} \mathcal{H}_1(t^\alpha) dt^\alpha \right| .$$

Da $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in N_{p_i}} \left| \int_{\Delta} \mathcal{K}_i dt^\alpha \right| = \sum_{\Delta \in N_{p_i}} I_{\Delta} = L_1$, läßt sich

wie im letzten Satz - in dem man $\int_{\Delta} |\mathcal{K}_m(t^\alpha)| dt^\alpha$ durch I_{Δ} ersetzt - zeigen, daß für die Menge $R_i(\varrho) := \bigcup_{\substack{\Delta \in N_{p_i} \\ \varrho_{\Delta} > \varrho}}$ gilt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in R_i(\varrho)} I_{\Delta} = 0 \text{ für jedes } \varrho > 0.$$

Andererseits ist wegen $L_1 < L_2$ für hinreichend großes i

$$\int_T |\mathcal{K}_i(t^\alpha)| dt^\alpha > \sum_{\Delta \in N_{p_i}} I_{\Delta} = L_1$$

und das Lebesguesche Areal von $[q_i, S_i(\eta)]$ mit

$$S_i(\eta) := \bigcup \left\{ \Delta \in N_{p_i} : \int_{\Delta} |\mathcal{K}_i| dt^\alpha - \left| \int_{\Delta} \mathcal{K}_i dt^\alpha \right| > \eta \int_{\Delta} |\mathcal{K}_i| dt^\alpha \right\}$$

für $\eta < (L_2 - L_1)(2L_2)^{-1}$ ist größer als eine positive Konstante. Denn die Annahme, das dieses Lebesguesche Areal beliebig klein wird, führt wegen

$$L_2 - L_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathcal{U}_{S_i(\eta)}} |\mathcal{K}_i| dt^\alpha - \sum_{\Delta \in \mathcal{U}_{S_i(\eta)}} \left| \int_{\Delta} \mathcal{K}_i dt^\alpha \right| \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(L_2 - L_1)L_2^{-1} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{U}_{S_i(\eta)}} |\mathcal{K}_i| dt^\alpha$$

zum Widerspruch.

Sei ϱ_i eine Nullfolge, so daß $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in R_i(\varrho_i)} I_{\Delta} = 0$.

Dann gilt für die Simplex $\Delta \in R_i(\varrho_i)$ wegen der Konvergenz von I_{Δ} , daß der r -Vektor $\int_{\Delta} \mathcal{K}_i dt^\alpha$ durch

$$\int_{\Delta} \frac{\partial p_i}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial p_i}{\partial t^r} dt^\alpha \quad \text{approximiert wird, d.h.}$$

$$\left| \int_{\Delta} \mathcal{K}_i dt^\alpha - \int_{\Delta} \frac{\partial p_i}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial p_i}{\partial t^r} dt^\alpha \right| \left| \int_{\Delta} \mathcal{K}_i dt^\alpha \right|^{-1} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Wir sehen nun die Approximationspolyeder $[p_i]$ als Approximationsflächen an: die $[p_i]$ konvergieren gleichmäßig gegen eine Darstellung x der reduzierten Extremalen E , durch Abrundung der Ecken und Kanten könnten wir stetig differenzierbare Fréchet-Mannigfaltigkeiten erreichen, deren Variationsintegrale sich um beliebig wenig von denen der $[p_i]$ unterscheiden. Weiter gilt

$$\int_T F(p_i, \frac{\partial p_i}{\partial t^\alpha}) dt^\alpha = \int_{\mathcal{L}_{R_i}(\mathcal{G}_i)} F(p_i, \frac{\partial p_i}{\partial t^\alpha}) dt^\alpha + r_i, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} r_i = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_{R_i}(\mathcal{G}_i)} F(p_i, \frac{\partial p_i}{\partial t^\alpha}) dt^\alpha &= \sum_{\Delta \subset \mathcal{L}_{R_i}(\mathcal{G}_i)} \int_{\Delta} \left[F(p_{0\Delta}, \frac{\partial p_i}{\partial t^\alpha}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n F_j(\tilde{p}, \frac{\partial p_i}{\partial t^\alpha}) \cdot (p_1^j - p_0^j) \right] dt^\alpha, \end{aligned}$$

wobei $p_{0\Delta}$ ein Punkt aus $p_i(\Delta)$ ist und

$$\tilde{p} = p_{0\Delta} + \vartheta (p_i - p_{0\Delta}), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta \subset \mathcal{L}_{R_i}(\mathcal{G}_i)} \int_{\Delta} F(p_{0\Delta}, \frac{\partial p_i}{\partial t^\alpha}) dt^\alpha &= \sum_{\Delta \subset \mathcal{L}_{R_i}(\mathcal{G}_i)} F(p_{0\Delta}, \int_{\Delta} \frac{\partial p_i}{\partial t^\alpha} dt^\alpha) = \\ &= \sum_{\Delta \subset \mathcal{L}_{R_i}(\mathcal{G}_i)} f(p_{0\Delta}, \int_{\Delta} \mathcal{K}_i dt^\alpha) + r'_i, \end{aligned}$$

wobei r'_i wegen der Stetigkeit von f mit $\mathcal{G}_i \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert.

Aus der starken Konvexität von f für jedes feste $x \in G$ folgt

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{L}_R(\mathfrak{g}_i)} f(p_{o_\Delta}, \int \mathfrak{x}_1 dt^\alpha) < \sum_{\Delta \in \mathcal{L}_R(\mathfrak{g}_i)} \int_{\Delta} f(p_{o_\Delta}, \mathfrak{x}_1) dt^\alpha,$$

wobei für die Differenz θ_i der beiden Seiten gilt:

$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf \theta_i > 0$. Es bleiben nun noch

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{L}_R(\mathfrak{g}_i)} \int_{\Delta} \sum_{j=1}^n F_j(\tilde{p}, \frac{\theta p_1}{\theta t^\alpha})(p_1^j - p_{o_\Delta}^j) dt^\alpha \quad \text{und}$$

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{L}_R(\mathfrak{g}_i)} \int_{\Delta} f(p_{o_\Delta}, \mathfrak{x}_1) dt^\alpha - \int_{\Delta} f(x_1, \mathfrak{x}_1) dt^\alpha =$$

$$= \sum_{\Delta \in \mathcal{L}_R(\mathfrak{g}_i)} \int_{\Delta} \sum_{j=1}^n F_j(\tilde{p}, \mathfrak{x}_1)(x_1^j - p_{o_\Delta}^j) dt^\alpha$$

$$\tilde{p} = x_1 + \mathcal{V}(p_{o_\Delta} - x_1)$$

abzuschätzen. Wegen $|p_i - p_{o_\Delta}| \leq D_1$, $|x_1 - p_{o_\Delta}| \leq 2 D_1$

und der Beschränktheit von $\sum_{\Delta \in \mathcal{L}_R(\mathfrak{g}_i)} \int_{\Delta} |\mathfrak{x}_1| dt^\alpha$ und

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{L}_R(\mathfrak{g}_i)} \int_{\Delta} \left| \frac{\theta p_1}{\theta t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\theta p_1}{\theta t^r} \right| dt^\alpha \quad \text{folgt}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in \mathcal{L}_R(\mathfrak{g}_i)} \int_{\Delta} \sum_{j=1}^n F_j(\tilde{p}, \frac{\theta p_1}{\theta t^\alpha})(p_1^j - p_{o_\Delta}^j) dt^\alpha = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\Delta \in \mathcal{L}_R(\mathfrak{g}_i)} \int_{\Delta} \sum_{j=1}^n F_j(\tilde{p}, \frac{\theta x_1}{\theta t^\alpha})(x_1^j - p_{o_\Delta}^j) dt^\alpha = 0.$$

Damit ist ein Widerspruch zu der Eigenschaft der S_μ , Approximationsflächen im Sinne von A.1, A.2 zu sein, herbeigeführt.

2.4 Folgerungen aus dem Approximationssatz

Im ersten Teil dieses Abschnitts überlegen wir uns, in wie weit man sagen kann, daß die Anzahl der Simplizes in den Sternen $st_T(P)$, $P \in N_{p_m}$ beschränkt sind. Die Voraussetzung $r = n-1$ ist dabei wesentlich.

Mit R_m bezeichnen wir die Menge der Punkte $P \in N_{p_m}$, $P \notin M_m(\sigma_m)$ mit der Eigenschaft, daß $[p_m, st_T(P)]$ einfach bis auf Berührung ist, d.h. zu jeder Nullfolge $\varepsilon_j > 0$ gibt es topologische Abbildungen $q(\varepsilon_j): st_T(P) \rightarrow R^n$, so daß $D([p_m, st_T(P)], [q(\varepsilon_j), st_T(P)]) \subset \varepsilon_j$. Für $P \in R_m$ ist $p_m(st_T(P)) \cap S^{n-1}(p_m(P), k_1 D_m)$ eine geschlossene topologische Mannigfaltigkeit, die auf der Sphäre $S^{n-1}(p_m(P), k_1 D_m)$ zwei Punktmengen berandet, die Bildmengen orientierter Fréchet-Mannigfaltigkeiten sind. Es gibt für eine dieser Fréchet-Mannigfaltigkeiten eine Parameterdarstellung mit dem Definitionsbereich $p_m^{-1}(st(P) \cap B^n(p_m(P), k_1 D_m)) \cap st_T(P)$, die im Innern ihres Definitionsbereichs injektiv ist. Da das Variationsintegral für diese Fréchet-Mannigfaltigkeit kleiner als aD_m^2 ist, a eine Konstante (hinsichtlich der Punkte $P \in R := \bigcup_{m \in N} R_m$) ist wegen der Extremalität von E die Anzahl der Simplizes in $st_T(P)$ beschränkt für alle $P \in R$. L sei eine Schranke der Anzahlen.

Die Punkte $P \in N_{p_m}$, $P \notin M_m(\sigma_m)$, $P \notin R_m$ nennen wir Verzweigungspunkte von $[p_m]$. Wir betrachten zunächst die Verzweigungspunkte, deren Durchdringungsmannigfaltigkeiten einen leeren Durchschnitt mit ∂T haben. Für hinreichend

großes m gibt es keine Verzweigungspunkte dieser Art in T . Denn dann beranden die Durchdringungsmannigfaltigkeiten einen Bereich $I_m \subset T$. Es gibt zu $[p_m]$ ein Vergleichspolyeder $[v_m]$ vom gleichen Typ und mit dem gleichen Rand wie $[p_m]$, während

$$J_F(v_m, T) = J_F(p_m, T) - J_F(p_m, I_m).$$

Das ist ein Widerspruch zur Extremalität von E bei hinreichend großem m , denn $\lim_{m \rightarrow \infty} J_F(p_m, I_m) > 0$. Das Vergleichspolyeder $[v_m]$ ist nach dem Verfahren von Hilfssatz 2 aus 2.2 für Durchdringungslinien vom Typ $|K'_0| = \emptyset$ zu konstruieren. Die Durchdringungsmannigfaltigkeiten werden vom Rand her abgebaut, bis es schließlich keine Durchdringung mehr gibt. Sei $\bar{p}_m$ diese schließlich erreichte Parameterdarstellung von $p_m(T)$. v_m wird dann definiert als $v_m|_{T-I_m} = p_m|_{T-I_m}$, wobei I_m das Urbild bei $\bar{p}_m$ von $p_m(I)$ ist, $v_m(\Delta)$ sind für die Simplizes Δ des Netzes von $\bar{p}_m$ beschränkt auf I_m ($r-1$)-dimensionale Simplizes in R^n , so daß v_m eine stetige Vektorfunktion ist.

Nun untersuchen wir die Verzweigungspunkte mit Durchdringungsmannigfaltigkeiten, die bis zum Rand von T verlaufen.

Satz A: Es gibt eine Folge von Teilmengen $T_m \subset T$, $T_m \subset T_{m'}$, für $m < m'$ mit $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} T_m = T$, so daß die Anzahl der Paare von Durchdringungsmannigfaltigkeiten mit Verzweigungspunkten von $[p_m]$ in T_m beschränkt ist für $m' > m$.

Folgerung: $J_L(p_m, \bigcup_{P \in V_m} st_T(P)) < o_m$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} o_m = 0$.

Beweis: T_m sei definiert als das Komplement in T der Vereinigung der mit ∂T inzidierenden Simplizes des Netzes N_{p_m} .

Es bleibt zu zeigen, daß die oben genannten Anzahlen beschränkt sind. Angenommen, dies sei nicht der Fall, dann gibt es für M mehr Paare von Durchdringungsmannigfaltigkeiten von p_M mit Verzweigungspunkten in T_m als für $M-1$. Eines der Paare ist dann bei p_{M-1} noch nicht aufgetreten. Das kann nur davon herrühren, daß den Durchdringungsmannigfaltigkeiten von p_M wegen der Bedingung 5 von K_{M-1} keine Durchdringungsmannigfaltigkeiten bei p_{M-1} entsprechen konnten, d.h. es liegt die Situation der Folgerung 3 aus Hilfssatz 2 aus 2.2 vor. Das ist aber für hinreichend großes M wegen Satz A aus 2.2 nicht möglich.

Zum Beweis der Folgerung bemerken wir, daß für festes m

$$\lim_{M \rightarrow \infty} J_L(p_M, T - T_M) = 0, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} J_L(p_M, \bigcup_{P \in V_M \cap T_m} st_T(P)) = 0.$$

Nun wollen wir eine Abschätzung des Areal der Simplizes von N_{p_m} geben, in denen ein (c, m) -singulärer Punkt liegt. Wir betrachten folgende Umgebungen $U_m(P)$, $P \in T$: $U_m(P)$ ist die Menge der $Q \in T$, für die es einen Weg in T von P nach Q und ein S -Polyeder $[p] \in K_m$ gibt, so daß der Weg bis auf endlich viele Punkte, die zu zwei Simplizes gehören, durch höchstens vier Simplizes des Netzes N_p verläuft. Diese Umgebungen sind groß genug, daß ein S -Polyeder $[p] \in K_m$ zu einem S -Polyeder $[q] \in K_m$ abgeändert werden kann, derart, daß in $T - U_m(P)$ p mit q übereinstimmt, während für q in $U_m(P)$ ein Stern mit Mittelpunkt P vorgeschrieben ist; d.h. die Punkte in $T - U_m(P)$ haben keinen Einfluß auf die Approximation bei P .

Satz B: $A_m(c)$ sei das Lebesguesche Areal der Vereinigung der $\frac{c}{m}$ -singulären Sterne $st_T(P)$ des Approximationspolyeders

$[p_m]$, $A'_m(c)$ das Lebesguesche Areal der Vereinigung der Simplizes, in denen ein (c, m) -singulärer Punkt liegt. Dann gibt es eine Nullfolge (c_m) , $c_m > 0$, so daß $A'_m(c_m)$ durch $A_m(c_m)$ abgeschätzt werden kann durch

$$A_m(c_m) > a A'_m(c_m) - r_m,$$

wobei a eine positive Konstante und r_m eine Nullfolge ist.

Beweis: Zu der Umgebung $U_m(P)$ sei $U'_m(P)$ die bezüglich Inklusion minimale Vereinigung von Simplizes des Netzes N_{p_m} , in der $U_m(P)$ enthalten ist.

Wir betrachten die Menge S_m der (c, m) -Singularitäten P , für die $M_m(\sigma_m) \cap U'_m(P) \neq \emptyset$ (Definition von $M_m(\sigma_m)$ vgl. Beweis des Satzes in 2.3). Da das Lebesguesche Areal von $M_m(\sigma_m)$ für $m \rightarrow \infty$ nach 0 konvergiert, gilt dasselbe für die Vereinigung der Simplizes, in denen Punkte aus S_m liegen.

Wegen (10) gibt es eine Nullfolge (c_m) , $c_m > 0$, so daß für alle (c_m, m) -Singularitäten, die nicht in S_m liegen, ein $\frac{1}{2}c_m$ -singulärer Stern von $[p_m]$ in $U'_m(P)$ liegt; d.h. die (c_m, m) -singulären Punkte liegen in Umgebungen $U'_m(Q)$ von Mittelpunkten Q $\frac{1}{2}c_m$ -singulärer Sterne von $[p_m]$. Um die gewünschten Abschätzungen zu erhalten, zerlegen wir die Vereinigung der $U'_m(Q)$, Q Mittelpunkt eines $\frac{1}{2}c_m$ -singulären Sterns, in disjunkte Umgebungen $V_m(Q)$, so daß $\bigcup_Q V_m(Q) = \bigcup_Q U'_m(Q)$, Q durchläuft die Menge der Mittelpunkte $\frac{1}{2}c_m$ -singulärer Sterne. Die $V_m(Q)$ lassen sich so wählen, daß die Anzahl der Simplizes in $V_m(Q)$ kleiner ist als das $\bar{L}$ -fache der Anzahl der Simplizes des Sterns von Q , $\bar{L}$ eine Konstante, sofern nicht ein Verzweigungspunkt in $V_m(Q)$ liegt. Wegen des letzten Satzes A strebt aber das Lebesguesche Areal der

Vereinigung der $V_m(Q)$, in denen ein Verzweigungspunkt von $[p_m]$ liegt, für $m \rightarrow \infty$ gegen 0. Mit den Eigenschaften 1) und 5) der S-Polyeder aus K_m folgt daraus die Behauptung von Satz B.

3. Existenz von Tangentialebenen an die reduzierte Extremale

3.1 Formulierung des Hauptsatzes und Beweisskizze

Das Resultat dieser Arbeit ist der folgende

Hauptsatz: Die Fréchet-Mannigfaltigkeit E vom Typ B^{n-1} mit der Parameterdarstellung $x : T \rightarrow R^n$ sei eine reduzierte Extremale des Variationsproblems

$$J_F(x, T) = \min$$

mit der Randbedingung, daß $x|_{\partial T}$ Parameterdarstellung einer Fréchet-Mannigfaltigkeit vom Typ S^{n-2} ist und $x|_{\partial T}$ injektiv ist. $J_F(x, T)$ sei endlich. Sei M die Menge der Punkte $P \in T$, so daß die Extremale in $x(P)$ keine Tangentialebene hat. Dann ist

$$J_L(x, M) = J_F(x, M) = 0.$$

Wir wollen dem Beweis, der in den folgenden Abschnitten geführt wird, eine Skizze voranstellen:

Im Abschnitt 2 haben wir eine geeignete Folge von Approximationspolyedern beschafft. Für diese S-Polyeder bilden wir in 3.2 Größen δ , die der ersten Variation entsprechen. Es wird gezeigt, daß diese Größen im Grenzwert die wichtigste Eigenschaft der ersten Variation noch besitzt, so daß man von einer Approximation der ersten Variation sprechen kann.

In 3.3 spezialisieren wir die Schar der Vergleichspolyeder. Durch einen Schluß von der Summe auf die Summanden (in Analogie zum Schließen vom Integral auf den Integranden beim Fundamentallemma der Variationsrechnung) erhalten wir eine Reihe von Ungleichungen. Daraus folgt für eine Nullfolge (c_m) , $c_m > 0$, daß das Lebesguesche Areal der Vereinigung der c_m -singulären Sterne von p_m kleiner als 0_m ist, wobei $\lim_{m \rightarrow \infty} 0_m = 0$.

Auf Grund von Satz B aus 2.3 und Satz B aus 2.4 kann dann die Behauptung des Hauptsatzes bewiesen werden.

3.2 Die erste Variation des Variationsintegrals

Definition: Unter einem Vergleichspolyeder $[q_m]$ zu dem Approximationspolyeder $[p_m]$ verstehen wir ein S-Polyeder vom Typ B^r mit einem Simplexpolyeder $q_m : T \rightarrow R^n$ als Parameterdarstellung, für das gilt:

- 1) Das Netz von p_m ist das gleiche wie das von q_m ,
- 2) Die Bildmenge von $[q_m]$ liegt im Definitionsbereich G von $F : q_m(T) \subset G$.

- 3) $q_m | \partial T = p_m | \partial T$, d.h. die S-Polyeder $[p_m]$ und $[q_m]$ haben den gleichen Rand.

Die Eigenschaft 1) folgt aus der Eigenschaft, daß beide Polyeder vom gleichen kombinatorischen Typ sind. Wegen

1) können wir q_m darstellen als

$$q_m(t^\alpha) = p_m(t^\alpha) - y_m(t^\alpha),$$

wobei $y_m(t^\alpha)$ eine auf den Simplizes des Netzes N_{p_m} lineare Abbildung ist mit $y_m | \partial T = 0$.

Zu $[q_m]$ betrachten wir die Schar der S-Polyeder $[q_m(t^\alpha; \varepsilon)]$ mit

$$q_m(t^\alpha; \varepsilon) := p_m(t^\alpha) - \varepsilon y_m(t^\alpha), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Wegen der Konvexität von G ist $[q_m(t^\alpha; \varepsilon)]$ ein Vergleichspolyeder zu $[p_m]$.

Aus der Extremalität von E folgt für alle Vergleichspolyeder $[q_m]$ zu $[p_m]$

$$J_F(p_m, T) - J_F(q_m, T) \leq R'_m,$$

mit $\lim_{m \rightarrow \infty} R'_m = 0$. Um eine Formel mit endlichen Summen zu gewinnen, approximieren wir $J_F(p_m, T)$, $J_F(q_m, T)$ gemäß (4), so daß mit

$$K(q, T) := \frac{1}{(r+1)!} \sum_{P \in N_q} \sum_{\Delta \in \text{st}_T(P)} F(q(P), Q_\alpha(\Delta)),$$

wobei $Q_\alpha(\Delta) := q(P_\alpha) - q(P)$, P_α die Eckpunkte von Δ ,

sodaß $Q_1(\Delta) \wedge \dots \wedge Q_r(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{\partial q}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial q}{\partial t^r} dt^\alpha$, gilt:

$$K(p_m, T) - K(q_m, T) \leq R_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0$$

Für das Vergleichspolyeder $[q_m(t^\alpha; \varepsilon)]$ schreiben wir die linke Seite der letzten Ungleichung explizit auf:

$$\varepsilon \delta_m(\varepsilon) := \frac{1}{(r+1)!} \sum_{P \in N_{P_m}} \sum_{\Delta \in \mathcal{S}_r(P)} [F(p_m(P), p_m(P_\alpha) - p_m(P)) - F(q_m(P; \varepsilon), q_m(P_\alpha; \varepsilon) - q_m(P; \varepsilon))] .$$

Wir wenden den Mittelwertsatz an und erhalten:

$$\begin{aligned} \delta_m(\varepsilon) &= \frac{1}{(r+1)!} \sum_{P \in N_{P_m}} \sum_{\Delta \in \mathcal{S}_r(P)} [F_1(r_m(P), R_\alpha(\Delta)) y_m^1(P) + \\ &\quad + F_1^\alpha(r_m(P), R_\alpha(\Delta)) (y_m^1(P_\alpha) - y_m^1(P))] \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot R_m ; \end{aligned}$$

dabei sind $r_m := p_m - \varepsilon \vee y_m$, $0 \leq \vee \leq 1$,

$$R_\alpha(\Delta) := r_m(P_\alpha) - r_m(P) .$$

Hilfssatz: Die Folge der Vergleichspolyeder $[q_m(t^\alpha)]$ habe die Eigenschaft, daß eine Konstante a existiere, so daß für alle Simplexes $\Delta \in N_{P_m}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gelte

$$|y_m(P_\alpha) - y_m(P)| \leq a |p_m(P_\alpha) - p_m(P)|$$

(P_α sind die Eckpunkte des Simplexes Δ). Dann gilt für $\delta_m(0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_m(\varepsilon)$

$$-\infty \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \delta_m(0) \leq 0 .$$

Beweis: $\varepsilon \delta_m(0) \leq \varepsilon \delta_m(0) - \varepsilon \delta_m(\varepsilon) + R_m$

$$-\infty \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \delta_m(0) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} [\delta_m(0) - \delta_m(\varepsilon)] .$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \lim_{m \rightarrow \infty} [\delta_m(0) - \delta_m(\varepsilon)] = \\ & = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(r+1)!} \sum_{P \in N_{P_m}} \sum_{\Delta \in \text{st}_r(P)} \{ [F_i(p_m(P), p_m(P_\alpha) - p_m(P)) - \\ & - F_i(r_m(P), R_\alpha(\Delta))] y_m^i(P) + \sum_{\alpha=1}^r [F_i^\alpha(p_m(P), p_m(P_\alpha) - p_m(P)) - \\ & - F_i^\alpha(r_m(P), R_\alpha(\Delta))] (y_m^i(P_\alpha) - y_m^i(P)) \} \leq 0. \end{aligned}$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$X_\alpha := p_m(P_\alpha) - p_m(P), \quad Y_\alpha := y_m(P_\alpha) - y_m(P), \quad R_\alpha := R_\alpha(\Delta)$$

und schätzen für ein festes $\Delta \in \text{st}_T(P)$ den Summanden der letzten Summe ab.

$$\begin{aligned} \text{a) } & [F_i(p_m(P), X_\alpha) - F_i(r_m(P), R_\alpha)] \cdot y_m^i(P) = \\ & = [f_i(p_m(P), \mathcal{H}) - f_i(r_m(P), \mathcal{R})] \cdot y_m^i(P) = \\ & = [f_i(p_m(P), \mathcal{H}_u) - f_i(r_m(P), \mathcal{R}_u)] \cdot y_m^i(P) + |\mathcal{H}| + \\ & + f_i(r_m(P), \mathcal{R}_u) (|\mathcal{H}| - |\mathcal{R}|) y_m^i(P), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{H} := X_1 \wedge \dots \wedge X_r$, $\mathcal{R} := R_1 \wedge \dots \wedge R_r$ und $\mathcal{H}_u$, $\mathcal{R}_u$ die Einheits-r-Vektoren in Richtung $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ sind.

$\mathcal{R} \neq 0$, falls $\varepsilon < \varepsilon_0$, wobei $\varepsilon_0 > 0$ eine von a und der Konstanten K (vgl. Eigenschaft 3) der S-Polyeder von K_m) abhängende Konstante ist.

$$\mathcal{R} = \mathcal{H} - \varepsilon^2 \sum_{\alpha=1}^r X_1 \wedge \dots \wedge \underset{(\alpha)}{Y_\alpha} \wedge \dots \wedge X_r + O(\varepsilon^2),$$

$$\text{mit } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} |O(\varepsilon^2)| < \infty.$$

$$||\mathcal{R}| - |\mathcal{H}|| \leq \varepsilon \cdot \left| \sum_{\alpha=1}^r X_1 \wedge \dots \wedge Y_{\alpha} \wedge \dots \wedge X_r \right| + O(\varepsilon^2),$$

$$|\mathcal{R}_u - \mathcal{H}_u| \cdot |\mathcal{R}| \cdot |\mathcal{H}| = |\mathcal{H}| \mathcal{R} - |\mathcal{R}| \mathcal{H}| \leq$$

$$|\mathcal{H}| \cdot \varepsilon \cdot \left| \sum_{\alpha=1}^r X_1 \wedge \dots \wedge Y_{\alpha} \wedge \dots \wedge X_r \right| + O(\varepsilon^2) + |\mathcal{H}| (|\mathcal{R}| - |\mathcal{H}|).$$

Wegen der Beschränktheit von $|Y_{\alpha}| \cdot |X_{\alpha}|^{-1}$ ist $|\mathcal{H}| |\mathcal{R}|^{-1}$ beschränkt und folglich

$$||\mathcal{R}| - |\mathcal{H}|| \leq \varepsilon \cdot |\mathcal{H}| a_1,$$

$$|\mathcal{R}_u - \mathcal{H}_u| \leq \varepsilon \cdot a_2, \text{ wobei } a_1, a_2 \text{ Konstanten sind.}$$

Mit Hilfe der Stetigkeit von f_1 folgt daraus für die in a) aufgeführte Größe:

$$| [F_1(p_m(P), X_{\alpha}) - F_1(r_m(P), R_{\alpha})] Y_m^1(P) | \leq |\mathcal{H}| \cdot \delta'(\varepsilon)$$

mit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta'(\varepsilon) = 0$, $\delta'(\varepsilon)$ unabhängig von P, Δ, m .

b) Wir drücken F_1^{α} durch f_1 aus gemäß dem Satz in 1.4 und erhalten für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned} S_2 &:= \sum_{\alpha=1}^r [F_1^{\alpha}(p_m(P), X_{\alpha}) - F_1^{\alpha}(r_m(P), R_{\alpha})] Y_{\alpha}^1 = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_r} [f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r}(p_m(P), \mathcal{H}) \sum_{\alpha=1}^r (-1)^{r-\alpha} Y_{\alpha}^1 X_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge X_{i_r}^1 - \\ &\quad - f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r}(r_m(P), \mathcal{R}) \sum_{\alpha=1}^r (-1)^{r-\alpha} Y_{\alpha}^1 R_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge R_{i_r}^1]. \end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit von $|Y_{\alpha}| \cdot |X_{\alpha}|^{-1}$ gibt es Konstanten a_3, a_4 , so daß

$$\left| \sum_{\alpha=1}^r (-1)^{r-\alpha} y_{\alpha}^i x_1^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\alpha}{x_r^{i_r}} \right| \leq a_3 |\mathcal{H}| ,$$

$$\left| \sum_{\alpha=1}^r (-1)^{r-\alpha} y_{\alpha}^i (x_1^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\alpha}{x_r^{i_r}} \wedge x_1^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\alpha}{x_r^{i_r}}) \right| \leq \varepsilon a_4 |\mathcal{H}| .$$

Damit ist wegen der Stetigkeit von f_I

$$|S_2| \leq \sigma''(\varepsilon) |\mathcal{H}| ,$$

wobei $\sigma''(\varepsilon)$ unabhängig von Δ , P , m ist, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma''(\varepsilon) = 0$.

Mit $\sigma(\varepsilon) := 2 \max(\sigma'(\varepsilon), \sigma''(\varepsilon))$ gilt wegen der Beschränktheit der Lebesgueschen Areale der $[p_m]$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{P \in N_{p_m}} \sum_{\Delta \in st_T(P)} \sigma(\varepsilon) |\mathcal{H}| = 0 .$$

3.3 Die Methode der Spezialisierung

Die Summe

$$\begin{aligned} d_m(0) = & \sum_{P \in N_{p_m}} \sum_{\Delta \in st_T(P)} \{ f_{i(P_m(P), \mathcal{H})} y_m^i(P) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^r (1)^{r-\alpha} \sum_{i_1 \dots i_r} f_{i_1 \dots i_r} (P_m(P), \mathcal{H}) \cdot \\ & x_1^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\alpha}{x_r^{i_r}} \cdot (y_m^i(P_{\alpha}) - y_m^i(P)) \} \end{aligned}$$

soll so umgeordnet werden, daß alle Summanden mit dem Faktor $y_m^i(P)$ zusammenstehen. Bei Termen der Art

$f_{i_1 \dots \underset{\alpha}{i_r} i \dots}$ kommt $y_m^i(P)$ vor in den Summen für P , P_{α} und zwar bei den Simplexes $\Delta \in st_T(P_{\alpha})$, deren

Eckpunkt P ist. In 1.4 haben wir uns überlegt, daß $(-1)^{r-\alpha} X_1 \wedge \dots \wedge X_r$ der $(r-1)$ -Vektor ist, der derjenigen orientierten Seite von $p_m(\Delta)$ zugeordnet ist, in der $p_m(P_\alpha)$ nicht liegt. $\bar{\mathcal{K}} := - \sum_{\alpha=0}^r (-1)^{r-\alpha} X_1 \wedge \dots \wedge X_r$ ist der $(r-1)$ -Vektor der orientierten Seite des Simplexes $p_m(\Delta)$, in der $p_m(P)$ nicht liegt; die Komponenten von $\bar{\mathcal{K}}$ bezeichnen wir mit $\bar{X}^{i_1 \dots i_r}$. Also ist

$$\begin{aligned} \delta_m(0) = & \sum_{P \in N_{P_m}} y_m^i(P) \sum_{\Delta \in st_r(P)} [f_{i_1}(P_m(P), \mathcal{K}) + \\ & + \sum_{i_1 \dots i_{r-1}} \bar{X}^{i_1 \dots i_{r-1}} \sum_{\alpha=0}^r f_{i_1 \dots i_{r-1}}^{i_r}(P_m(P_\alpha), \mathcal{K})] , \end{aligned}$$

wobei $P_0 := P$.

Die S -Polyeder $[p_m(t^\alpha) - y_m(t^\alpha)]$ mit Funktionen y_m , die auf den Simplex des Netzes N_{P_m} linear sind und die durch

$$y_m^i(P) := 0, \text{ falls } P \text{ Verzweigungspunkt von } p_m \text{ oder } P \in \partial T$$

$$\begin{aligned} y_m^i(P) := D_m^{2-r} z_m^i(P) := D_m^{2-r} \sum_{\Delta \in st_r(P)} [f_{i_1}(P_m(P), \mathcal{K}) + \\ + \sum_{i_1 \dots i_{r-1}} \bar{X}^{i_1 \dots i_{r-1}} \sum_{\alpha=0}^r f_{i_1 \dots i_{r-1}}^{i_r}(P_m(P_\alpha), \mathcal{K}) \end{aligned}$$

für $P \in N_{P_m}$, $P \notin \partial T$, P nicht Verzweigungspunkt,

definiert sind, sind Vergleichspolyeder zu $[p_m]$ mit der Eigenschaft, daß die Menge

$$\begin{aligned} \{ |y_m(P_\alpha) - y_m(P)| \cdot |p_m(P_\alpha) - p_m(P)|^{-1}, P \in N_{P_m}, m > m_0, \\ P_\alpha \text{ Eckpunkt von } \Delta \in st_T(P) \} \end{aligned}$$

$$O_m^i(P) := \sum_{\Delta \in \text{st}_T(P)} [f_i(p_m(P), \mathcal{K}) + \sum_{\alpha=1}^r \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_{r-1}} \bar{x}^{i_1 \dots i_{r-1}} (f_{I(p_m(P_\alpha), \mathcal{K})} - f_{I(p_m(P), \mathcal{K})})]$$

Wir zeigen, daß $D_m^{1-r} \cdot O_m^i(P)$ für m nach ∞ für alle P nach 0 konvergiert. Da die Anzahl der Simplizes in $\text{st}_T(P)$ beschränkt ist, genügt es,

$$D_m^{1-r} \cdot f_i(p_m(P), \mathcal{K})$$

$$D_m^{1-r} \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_{r-1}} \bar{x}^{i_1 \dots i_{r-1}} (f_{I(p_m(P_\alpha), \mathcal{K})} - f_{I(p_m(P), \mathcal{K})})$$

zu untersuchen. Die erste Größe konvergiert wie D_m gegen 0 wegen der Homogenität von f_i . Da $D_m^{1-r} \cdot |\bar{\mathcal{K}}|$ beschränkt ist, strebt die zweite Größe nach 0 wegen der Stetigkeit von f_I in den Ortsvariablen, $(p_m(P_\alpha))_{\alpha=1, \dots, r} \rightarrow p_m(P)$.

Zu $[p_m]$ betrachten wir nun S-Polyeder $[\tilde{p}_m] \in \tilde{K}_m$, einer Klasse von S-Polyedern, die durch die Eigenschaften 1), 2), 4), 3) von K_m und 5') definiert ist, wobei 5') aus der Eigenschaft 5) von K_m durch Ersetzen der Konstanten K, K_1 durch $\tilde{K}, \tilde{K}_1$ hervorgeht, $\tilde{K}_1 = \frac{1}{2} K_1, \tilde{K} > 0$. Wir interessieren uns nur für die S-Polyeder aus $\tilde{K}_m$, die die folgenden Eigenschaften haben:

- Ist P Verzweigungspunkt, so ist $\text{st}_T(P)$ aus dem Netz N_{p_m} auch $\text{st}_T(P)$ im Netz $N_{\tilde{p}_m}$.
- Ein Simplex $\Delta \in N_{p_m}$ ist entweder Simplex in $N_{\tilde{p}_m}$ oder eine Vereinigung von r Simplizes, die aus Δ entstehen, wenn man einen Punkt aus dem Innern einer $(r-1)$ -dimensionalen Kante von Δ als Eckpunkt von $N_{\tilde{p}_m}$ wählt.

c) $\widetilde{p}_m(t^\alpha) := p_m(t^\alpha)$ für alle $(t^\alpha) \in T$.

Das heißt, daß die $[\widetilde{p}_m] \in \widetilde{K}_m$ mit a), b), c) sich nur durch ein "feineres" Netz von $[p_m]$ unterscheiden. Diese $[\widetilde{p}_m]$ sind also auch Approximationspolyeder und für sie gelten alle für $[p_m]$ hergeleiteten Eigenschaften.

Hilfssatz: Zu $[p_m]$ gibt es eine endliche Menge

$\{[p_{m_j}] \in \widetilde{K}_m, j = 1, 2, \dots, J, p_{m_j} \text{ mit den Eigenschaften a), b), c)}\}$, J unabhängig von m , so daß zu jeder $(r-1)$ -dimensionalen Kante von $\Delta \in \text{st}_T(P)$, $P \in N_{p_m}$, P nicht Verzweigungspunkt, ein j , $1 \leq j \leq J$, existiert, so daß Δ in $N_{p_{m_j}}$ Vereinigung von r Simplexes ist, während alle von Δ verschiedenen Simplexes der Sterne, in denen Δ liegt, Simplexes von $N_{p_{m_j}}$ sind.

Der Beweis wird mit graphentheoretischen Mitteln geführt. Um den Fluß der Überlegungen nicht zu unterbrechen, wird er am Ende dieses Abschnitts nachgetragen.

Die Größen, die sich auf p_{m_j} beziehen, bezeichnen wir mit dem gleichen Buchstaben wie die entsprechenden Größen bei p_m , unterscheiden sie aber durch Anfügen des Index j .

Für die Nullfolge $c'_m := \max_j (c_{mj}, c_m)$ gilt dann

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{P \in S_m(c'_m) \cup \bigcup_j S_{m_j}(c'_{m_j})} D_m^F = 0.$$

Für die Punkte P der Menge $R'_m = \{P \in N_{p_m}, P \notin S_m(c'_m) \cup$

$\bigcup_j S_{m_j}(c'_{m_j}) \cup \partial T, P \text{ nicht Verzweigungspunkt}\}$ ist

$$|z_m^i(P)| \leq c_m' D_m^{r-1}, \quad |z_{mj}^i(P)| \leq c_m' D_m^{r-1}.$$

Der Durchschnitt der Simplizes $\Delta_1, \Delta_2 \in \text{st}_T(P)$, $P \in R'_m$ sei die $(r-1)$ -dimensionale Kante $\square$, und p_{mj} sei das nach dem letzten Hilfssatz der Kante $\square$ zugehörige S -Polyeder aus $\tilde{K}_m$.

Durch Subtraktion von $z_m^i(P)$ und $z_{mj}^i(P)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \theta_m^i(P) &= |z_m^i(P) - z_{mj}^i(P)| = |f_{i_1 \dots i_{r-1} i}(p_m(P), \mathcal{K}_1) \bar{x}_1^{i_1 \dots i_{r-1}} \\ &+ f_{i_1 \dots i_{r-1} i}(p_m(P), \mathcal{K}_2) \bar{x}_2^{i_1 \dots i_{r-1}} \\ &- \sum_{\substack{\Delta \in N_{p_{mj}} \\ \Delta \subset \Delta_1 \cup \Delta_2}} f_{i_1 \dots i_{r-1} i}(p_m(P), \mathcal{K}(\Delta)) \bar{x}_\Delta^{i_1 \dots i_{r-1}}|, \end{aligned}$$

wobei mit $\mathcal{K}_x$, $\mathcal{K}(\Delta)$ die den Simplizes $p_m(\Delta_x)$, $x = 1, 2$, $p_m(\Delta)$ zugeordneten r -Vektoren, mit $\bar{x}_x$, $\bar{x}_\Delta$ die den $(r-1)$ -dimensionalen Kanten der Simplizes $p_m(\Delta_x)$, $p_m(\Delta)$, in denen der Punkt $p_m(P)$ nicht liegt, zugeordneten $(r-1)$ -Vektoren bezeichnet seien.

Wegen der Homogenität 0. Ordnung von f_I ergibt sich

$$\begin{aligned} \theta_m^i(P) &= |f_{i_1 \dots i_{r-1} i}(p_m(P), \mathcal{K}_1) (\bar{x}_1^{i_1 \dots i_{r-1}} - \sum_{\substack{\Delta \in N_{p_{mj}} \\ \Delta \subset \Delta_1}} \bar{x}_\Delta^{i_1 \dots i_{r-1}}) + \\ &+ f_{i_1 \dots i_{r-1} i}(p_m(P), \mathcal{K}_2) (\bar{x}_2^{i_1 \dots i_{r-1}} - \sum_{\substack{\Delta \in N_{p_{mj}} \\ \Delta \subset \Delta_2}} \bar{x}_\Delta^{i_1 \dots i_{r-1}})|. \end{aligned}$$

Aus der Figur, die von $p_m(\Delta_x)$, $p_m(\Delta)$, $\Delta \in N_{p_{mj}}$, $\Delta \subset \Delta_1 \cup \Delta_2$ gebildet wird, geht hervor, daß

$$\eta = \bar{\mathcal{H}}_2 - \sum_{\substack{\Delta \in N_{p_m j} \\ \Delta \subset \Delta_2}} \bar{\mathcal{H}}_\Delta = -\bar{\mathcal{H}}_1 + \sum_{\substack{\Delta \in N_{p_m j} \\ \Delta \subset \Delta_1}} \bar{\mathcal{H}}_\Delta$$

der $(r-1)$ -Vektor ist, der dem Teilsimplex von $p_m(\square)$ mit dem Punkt $p_m(\tilde{P}) \in p_m(\square)$, $\tilde{P} \in N_{p_m j}$, $\tilde{P} \notin N_{p_m}$ und den von $p_m(P)$ verschiedenen Eckpunkten von $p_m(\square)$ als Eckpunkten zugeordnet ist:

$$\theta_m^i(P) = | [f_{i_1 \dots i_{r-1} i}(p_m(P), \mathcal{H}_1) - f_{i_1 \dots i_{r-1} i}(p_m(P), \mathcal{H}_2)] \cdot y^{i_1 \dots i_{r-1} i} | \quad .$$

Die r -Vektoren $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ lassen sich darstellen

$$\mathcal{H}_1 = \eta \wedge x_1, \quad \mathcal{H}_2 = \eta \wedge x_2, \quad |\mathcal{H}_\alpha| = |\eta| \cdot |x_\alpha| \quad ,$$

da $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \supset \square$. Setzen wir diese Darstellungen in die letzte Formel für $\theta_m^i(P)$ ein und formen gemäß dem Satz aus 1.4 um, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \theta_m^i(P) &= |F_i^r(p_m(P), y_1, \dots, y_{r-1}, x_1) - \\ &- F_i^r(p_m(P), y_1, \dots, y_{r-1}, x_2)| \leq 2 \cdot c_m^i \cdot D_m^{r-1} \quad . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Homogenitätseigenschaft (3) von F_i^α ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} |F_i^r(p_m(P), \frac{y_1}{|y_1|}, \dots, \frac{y_{r-1}}{|y_{r-1}|}, x_1) - F_i^r(p_m(P), \frac{y_1}{|y_1|}, \dots, \frac{y_{r-1}}{|y_{r-1}|}, x_2)| \\ \leq 2 \cdot c_m^i \quad . \end{aligned}$$

Erinnern wir uns nun an die Deutung der F_i^α in 1.4: In dem $(n-r+1)$ -dimensionalen Vektorraum U , der von

$\{ \mathcal{K} = Y_1 u \wedge \dots \wedge Y_{r-1} u \wedge X, X \text{ orthogonal zu } Y_{\alpha} u, \alpha = 1, \dots, r-1 \}$ erzeugt wird, ist F_1^r der Normalenvektor der Tangentialhyperebene an die zur Indikatrix $I_{\overline{F}}$ homothetischen Fläche im Punkt $\mathcal{K} = Y_1 u \wedge \dots \wedge Y_{r-1} u \wedge X_u$. Wegen der starken Konvexität von f , d.h. der strengen Konvexität von $I_{\overline{F}}$ und der Stetigkeit von F_1^{α} auf der kompakten Menge $G \times \overset{r}{X} B^n(0,1)$ gibt es zu c_m^1 eine Konstante ε_m mit $\lim_{c_m^1 \rightarrow 0} \varepsilon_m = 0$, so daß aus der letzten Ungleichung folgt:

$$\left| \frac{x_1}{|x_1|} - \frac{x_2}{|x_2|} \right| < \varepsilon_m.$$

Für $\mathcal{K}_x$ gilt also

$$\left| \frac{\mathcal{K}_1}{|\mathcal{K}_1|} - \frac{\mathcal{K}_2}{|\mathcal{K}_2|} \right| < \varepsilon_m.$$

Wir bemerken, daß diese Relation für alle Simplizes mit gemeinsamer $(r-1)$ -dimensionaler Kante für alle Punkte $P \in R_m^1$, $m \in N$ gilt. Für das Komplement $\mathcal{C} R_m^1$ von R_m^1 in der Menge der Eckpunkte von N_{p_m} gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_F(p_m, \bigcup_{P \in \mathcal{C} R_m^1} st_T(P)) = 0.$$

Da die Anzahl der Simplizes in $st_T(P)$ für $P \in R_m^1$ durch L beschränkt ist, folgt für zwei beliebige Simplizes Δ_ν , Δ_μ aus $st_T(P)$ aus der Dreiecksungleichung:

$$\left| \frac{\mathcal{K}_\nu}{|\mathcal{K}_\nu|} - \frac{\mathcal{K}_\mu}{|\mathcal{K}_\mu|} \right| < L \varepsilon_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0.$$

Wir tragen nun den Beweis des Hilfssatzes nach.

Beweis: Wir geben einen Algorithmus zur Konstruktion der Netze $N_j := N_{p_{mj}}$ an. Die Vereinigung der Verzweigungspunkte von $[p_{mj}]$ mit den Eckpunkten $P \in \partial T_{N_{p_m}} \ni P$ nennen wir Randpunkte von $N := N_{p_m}$, die übrigen Eckpunkte von N innere Punkte von N .

Sei $\square_0$ eine $(r-1)$ -dimensionale Kante zweier Simplexes $\Delta_1, \Delta_2 \in \text{st}_T(P)$, P ein innerer Punkt von N . Wir wählen $\tilde{P}$ aus dem Innern von $\square_0$ als Eckpunkt von N_1 , wobei $|p_m(P_\alpha) - p_m(\tilde{P})| > \tilde{k}_1 \cdot D_m$, P_α die Eckpunkte der Simplexes Δ_1, Δ_2 . Die $2 \cdot r$ Simplexes mit $\tilde{P}$ und Eckpunkten von Δ_1 oder Δ_2 als Eckpunkten seien Simplexes des Netzes N_1 . Damit ist $\square_0$ berücksichtigt. Die von Δ_1, Δ_2 verschiedenen Simplexes der Sterne $\text{st}_T(P_\alpha)$, P_α Eckpunkt von Δ_1 oder Δ_2 übernehmen wir als Simplexes von N_1 , falls P_α kein Randpunkt ist. Die $(r-1)$ -dimensionalen Kanten dieser Simplexes nennen wir gesperrt für N_1 . Als nächste zu berücksichtigende Kante wählen wir eine Kante, die eine $(r-2)$ -dimensionale Kante mit einer gesperrten Kante gemeinsam hat und Kante von $\Delta'_1, \Delta'_2 \in \text{st}_T(P')$ ist, wobei P' innerer Punkt von N ist. Wenn eine solche Kante nicht existiert, wählen wir eine beliebige Kante von $\Delta''_1, \Delta''_2 \in \text{st}_T(P'')$, P'' innerer Punkt von N . Das Verfahren bricht ab, wenn keine solchen Kanten mehr da sind.

Bei der Konstruktion von N_j , $j > 1$, fangen wir mit einer bei $N_1, \dots, N_{j-1}$ noch nicht berücksichtigten Kante $\square_0$ an, $\square_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \text{st}_T(P)$, P innerer Punkt

von N . Die bei $N_1, \dots, N_{j-1}$ berücksichtigten Kanten werden nicht wieder berücksichtigt, sondern dienen als gesperrte Kanten. Mit dieser Bedingung verläuft das Konstruktionsverfahren analog zu dem für N_1 beschriebenen. Die Anzahl der nötigen Netze ergibt sich daraus, wie oft eine Kante die Rolle der gesperrten Kante für eine andere Kante spielt. Diese Zahl ist kleiner als $(r+2)(r+1) \cdot L$, L die maximale Anzahl von Simplizes in einem Stern, dessen Mittelpunkt innerer Punkt von N ist; denn eine Kante $\square$ kann als gesperrte Kante auftreten, wenn eine der Kanten der Simplizes der $r+2$ Sterne, in denen die beiden Simplizes Δ_1, Δ_2 mit $\square = \Delta_1 \cap \Delta_2$ liegen, berücksichtigt wird. Wenn die Mittelpunkte der $r+2$ Sterne keine Verzweigungspunkte sind, bestehen die Sterne aus höchstens L Simplizes. Falls aber ein Verzweigungspunkt P_0 unter den Mittelpunkten ist, wurde $\square$ wegen der Kanten $\Delta_\nu \cap \Delta_\mu$, $\Delta_\nu, \Delta_\mu \in \text{st}_T(P_0)$ nicht gesperrt.

3.4 Bestimmung des Maßes der Singularitätenmenge

Bemerkungen zu dem Fall $r < n-1$

Definition: $P \in T$ habe die folgende Eigenschaft

(λ) es gibt $m_0(P)$, so daß für $m > m_0(P)$ keiner der Eckpunkte der Simplizes von N_{p_m} , in denen P liegt, Verzweigungspunkt von $[p_m]$ ist.

Dann existiert in $x(P)$ eine (orientierte) Tangentialebene

an die Extremale genau dann, wenn zu jedem $c > 0$ $m(c, P) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß P (c, m) -regulär ist für $m > m(c, P)$.

Die Tangentialebene in P an E ist eine geometrische Größe und von den Approximationspolyedern unabhängig; denn existiert in P an E eine Tangentialebene, so folgt aus der Definition der Regularität und Satz B aus 2.2 sofort, daß der Tangentialkegel in P an E eine r -dimensionale Ebene ist. Dabei ist der Tangentialkegel in P an E definiert als die Vereinigung der Grenzgeraden von konvergenten Sehnenfolgen $\{x(P) + \lambda(x(Q) - x(P)), \lambda \in \mathbb{R}, Q \in T\}$ beim Grenzübergang $Q \rightarrow P$.

Sei P ein Punkt von T mit der Eigenschaft $(*)$, zu dem es eine unbeschränkte Folge m_i gibt, so daß P (ε_{m_i}, m_i) -regulär ist, wobei ε_m die in 3.3 definierte Nullfolge ist. Nach Satz B aus 2.2 gibt es dann eine Nullfolge ε'_m , so daß P (ε'_m, m) -regulär ist für $m > m(P)$. Aus dem Beweis zu Satz B aus 2.2 folgt weiter, daß es einen Einheits- r -Vektor $\mathcal{H}(P)$ gibt, so daß für die den Simplizes $p_m(\Delta)$, $p_m \in K_m$, $\Delta \subset N_{p_m}$, P Eckpunkt von Δ , zugeordneten r -Vektoren $\mathcal{R}_m(\Delta)$ gilt: $|\mathcal{R}_m(\Delta)_u - \mathcal{H}(P)| < \delta$ für alle $\delta > 0$, falls $m > m(\delta)$. $\mathcal{H}(P)$ ist der der $\mathcal{T}$ (orientierten) Tangentialebene in P an E zugeordnete r -Vektor.

Wir schätzen nun das Lebesguesche Maß der Menge M , d.h. der Menge der Punkte $P \in T$, für die in P an E keine Tangentialebene existiert, ab. Wir betrachten dazu die Menge der Verzweigungspunkte von p_m und die Menge M' der Punkte P , für die $c > 0$ und eine Zahl $m_0(P)$ existieren, so daß

$P(c, m)$ -singulär ist, falls $m > m_0(P)$. Nach Satz A aus 2.4 strebt das Lebesguesche Areal der Vereinigung der Verzweigungssterne für $m \rightarrow \infty$ gegen 0. In Satz B aus 2.4 haben wir das Lebesguesche Areal $A'_m(c)$ der Vereinigung der Simplizes, in denen (c, m) -singuläre Punkte liegen, abgeschätzt durch das Lebesguesche Areal $A_m(c)$ der Vereinigung der Simplizes $\frac{c}{2}$ singulärer Sterne von $[p_m]$. In 3.3 haben wir gezeigt, daß für eine Nullfolge ϵ_m

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m(2\epsilon_m) = 0$$

woraus schließlich folgt:

$$\begin{aligned} J_L(x, M) &= J_F(x, M) = \lim_{m \rightarrow \infty} A'_m(2\epsilon_m) = \frac{1}{a} \lim_{m \rightarrow \infty} A_m(2\epsilon_m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zum Schluß einige Bemerkungen zum Fall $r < n-1$.

Man überzeugt sich leicht davon, daß die im Abschnitt 1 eingeführten Begriffe auch für $r < n-1$ sinnvoll sind, und daß die Sätze aus Abschnitt 1 auch für $r < n-1$ gelten. Unter der Voraussetzung, daß man Approximationspolyeder mit den Eigenschaften, die in Abschnitt 2 hergeleitet werden, zur Verfügung hat, läßt sich auch der Kalkül von 3.2 und 3.3 durchführen.

Die Schwierigkeiten beim Beweis der Existenz von geeigneten Approximationspolyedern treten auf bei der Übertragung von Satz A aus 2.2, Satz B aus 2.2 und Satz A aus 2.4.

Literaturverzeichnis

- [1] Barthele, W., Zur Minkowski-Geometrie, begründet auf dem Flächeninhaltsbegriff
Monatsh. f. Math. 63, 317-343 (1959)
- [2] Barthele, W., Über homogene Funktionen auf dem Graßmannkegel
Archiv d. Math. 9, 262-274 (1958)
- [3] Bourbaki, N., Eléments de mathématique
livre 2 ch. III, Algèbre multilinéaire, Paris 1948
- [4] Busemann, H., Lokale Eigenschaften der zu Variationsproblemen gehörigen metrischen Räume
Fundamenta Math., 32, 265-287 (1939)
- [5] Busemann, H., G. Ewald, G.C. Shephard, Convex bodies and convexity on Grassmann-cones, I-IV
Math. Annalen 151, 1-41 (1963)
Teil V: Archiv d. Math. 13, 512-526 (1962)
- [6] Busemann, H., W. Mayer, On the foundation of calculus of variations
Trans. Amer. Math. Soc. 49, 173-198 (1941)
- [7] Cesari, L., An existence theorem of calculus of variations for integrals on parametric surfaces
Amer. J. Math. 74, 265-295 (1952)
- [8] Courant, R., Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces
New York 1950
- [9] Courant, R., On a generalized form of Plateau's problem
Trans. Amer. Math. Soc. 50, 40-47 (1941)

- [10] Danskin, J.M., On the existence of minimizing surfaces in parametric double integral problems in the calculus of variations
Rivista Mat. Univ. Parma, 3, 43-64 (1952)
- [11] McShane, E.J., On the semicontinuity of double integrals in the calculus of variations
Annals of Math., 33, 460-484 (1932)
- [12] Morrey, C.B., Multiple integrals in the calculus of variations
Berlin 1966
- [13] Morrey, C.B., A class of representations of manifolds I
Amer.J.Math., 55, 685-707 (1933)
- [14] Rademacher, H., Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen II
Math. Annalen, 81, 52-63 (1920)
- [15] Rado, T., On the problem of Plateau
Berlin 1933, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete
- [16] Rado, T., Length and area
New York 1948
- [17] Siegel, C.L., Integralfreie Variationsrechnung
Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Nr. 4, 81-86 (1957)
nachgedruckt in Gesammelte Abhandlungen, III,
S. 264-269
- [18] Sigalov, A.G., Zweidimensionale Probleme der Variationsrechnung (russisch)
Uspechi Mat. Nauk SSR, 6, 16-101 (1951)
- [19] Velte, W., Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale
Math. Zeitschrift, 60, 367-383 (1954)

Lebenslauf

Am 5.9.1940 wurde ich, Ursula Brechtken-Manderscheid, in Cottbus geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule in Birkenfeld/Nahe und St.Wendel und des Staatlichen Mädchenrealgymnasiums in St.Wendel studierte ich von 1959 bis 1965 Mathematik und Physik an den Universitäten Saarbrücken und Würzburg.

Im Sommer 1965 habe ich in Würzburg mit einer Arbeit "Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale" die Diplomprüfung für Mathematik abgelegt. Seit 1965 bin ich Assistentin an der Mathematischen Abteilung der Ruhr-Universität Bochum.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren W. Barthel, J. Dörr, W. Habicht und F.Sommer.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Professor Dr. G. Ewald.

Ursula Brechtken-Manderscheid

